Trabajo Fin de Máster

Herramientas hiperbólicas y proyectivas en GeoGebra

Presentado por: Ujué Rodríguez Trías
Dirigido por: Fernando Etayo Gordejuela

Índice

Introducción

El objetivo final de este trabajo es la elaboración de sendos paquetes de herramientas para la aplicación GeoGebra; uno para Geometría Hiperbólica plana en el que usaremos como soporte el Disco de Poincaré, y otro para Geometría Proyectiva plana para lo cual tomaremos como modelo el disco obtenido al proyectar estereográficamente desde el polo sur el hemisferio norte de la esfera unidad.

Esta memoria consta de tres partes claramente diferenciadas. En una primera parte hacemos una presentación de las Geometrías no Euclídeas y de los modelos planos y conformes con los que vamos a trabajar. Se hacen algunas consideraciones acerca de las peculiaridades de cada una de las geometrías y comentarios sobre las dificultades que hemos ido encontrando en la elaboración de las diversas herramientas y sobre las limitaciones del manejo de GeoGebra a nivel de usuario. Las partes segunda y tercera están consagradas a la elaboración de las herramientas propiamente dichas para los modelos planos de las Geometrías Hiperbólica y Proyectiva respectivamente.

Se adjunta a esta memoria un CD con dos paquetes de herramientas para la aplicación GeoGebra; uno para Geometría Hiperbólica y otro para Geometría Proyectiva. También se incluyen en el CD algunas construcciones dinámicas en dichos modelos.

Parte Primera

De las Geometrías no Euclídeas

1.- Las Geometrías no Euclídeas

El quinto postulado de Euclides ha sido una de las cuestiones más controvertidas de la historia de las Matemáticas, objeto de polémicas durante más de dos mil años.

Euclides (330 a. C. - 275 a. C.) en L*os Elementos* construyó la geometría partiendo de 23 axiomas y cinco postulados, a partir de los cuales demostró todos los teoremas. Un axioma no necesita demostración, ya que se trata de una proposición clara y evidente. En cambio, un postulado es una proposición que, no siendo tan evidente como un axioma, se admite como verdadera sin demostrarla. Los postulados de Euclides dicen:

1. Por dos puntos distintos pasa una única recta.
2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.
3. Hay una única circunferencia con un centro y un radio dados.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una recta, al incidir sobre dos rectas, hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontraran en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.

Desde su mismo nacimiento, el quinto postulado de Euclides planteó un interrogante, ¿era realmente un postulado independiente o era un teorema que podía ser demostrado a partir de los cuatro postulados anteriores?

Uno de los objetivos en las investigaciones sobre el quinto postulado fue el de encontrar otra versión del mismo que fuera más clara, más intuitiva y que, a su vez, fuera totalmente equivalente al propuesto por Euclides. En 1795 el matemático escocés John Playfair dio el enunciado alternativo más conocido de todos y que se suele utilizar en los libros de texto: *por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a dicha recta*. Es frecuente referirse al quinto postulado como al *Postulado de las Paralelas*.

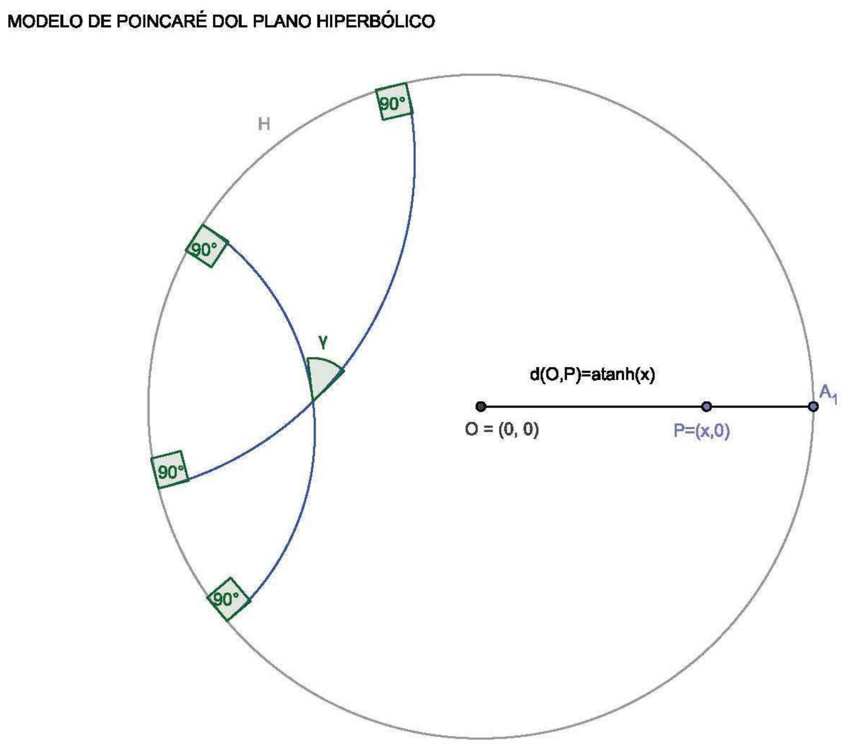
El primer matemático que se dio cuenta de que el quinto postulado era independiente de los otros cuatro y que de su negación podía surgir una nueva geometría fue Carl Friedrich Gauss (1777 –1855), pero no llegó nunca a publicar sus resultados por miedo a no ser bien comprendido.

Nikolái Lobachevsky (1792 - 1856) partió de la hipótesis de que el quinto postulado no podía ser demostrado y construyó una nueva geometría a partir de un postulado diferente en el que se afirmaba que *dados una recta r y un punto P exterior a ella, se pueden trazar al menos dos paralelas a r que pasen por el punto P*. Trabajando sobre esta hipótesis Lobachevsky estableció una Trigonometría no Euclídea con resolución de triángulos y cálculo de áreas y volúmenes. En 1868 el matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) construyó un modelo físico, la pseudoesfera, para albergar, aunque fuera de forma local, la Geometría de Lobachevsky. Posteriormente Félix Klein (1849-1952) la generalizó a todo el espacio. La conclusión final a la que se llegó es que la Geometría Hiperbólica es tan consistente como la Geometría Euclídea.

Una vez aceptado como igualmente natural el modelo de Geometría Hiperbólica en que se rechazaba el quinto postulado de Euclides sobre las rectas paralelas, los matemáticos buscaron nuevos sistemas geométricos que incumplieran el quinto postulado. Uno de esos modelos lo describió Georg Bernhard Riemann (1826-1866), pupilo de Gauss, negando la existencia de las paralelas. En la Geometría Hiperbólica, dado un punto exterior a una recta siempre es posible obtener más de una recta paralela a la primera que pase por dicho punto. En la Geometría Esférica o Proyectiva, dada una recta y un punto exterior a la misma, no existe ninguna recta paralela, es decir, ninguna recta que no interseque a la primera.

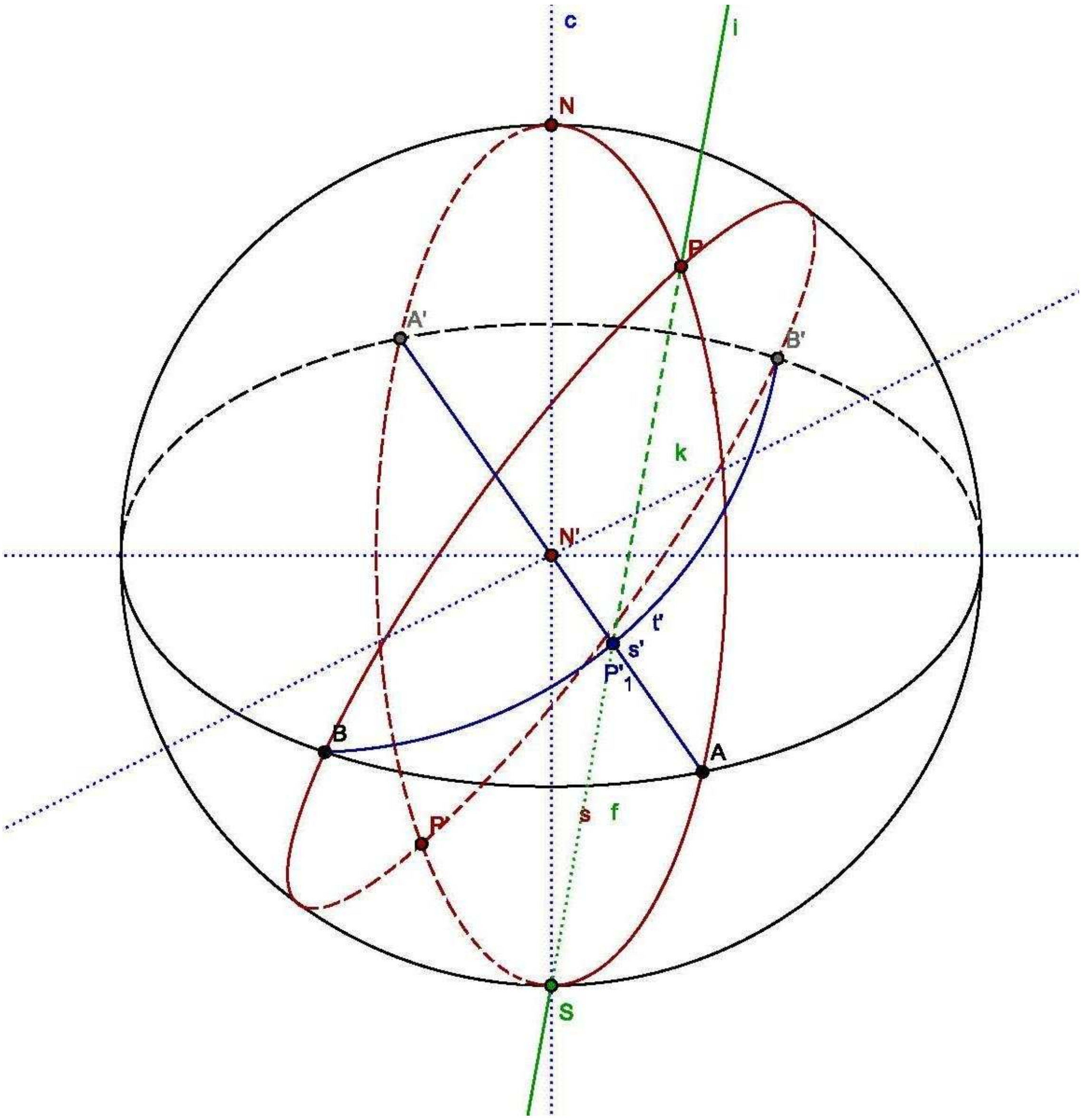
2.- Modelos planos y conformes de las Geometrías no Euclídeas

En una memoria de 1887, el matemático Francés Henri Poincaré (1854-1912) describió un modelo concreto de una Geometría Hiperbólica en dos dimensiones; este modelo es conocido ahora como el disco de Poincaré. Los puntos en el modelo de Poincaré del Plano Hiperbólico son los puntos del interior de un círculo, y las rectas son aquellos arcos de circunferencia generalizada que intersecan ortogonalmente con la frontera del círculo, la circunferencia H. Se puede dotar a este modelo de Plano Hiperbólico con una medida de longitud no acotada, de tal manera que las rectas anteriormente definidas son las geodésicas del espacio métrico así generado. Los ángulos son medidos por sus valores como ángulos euclídeos.

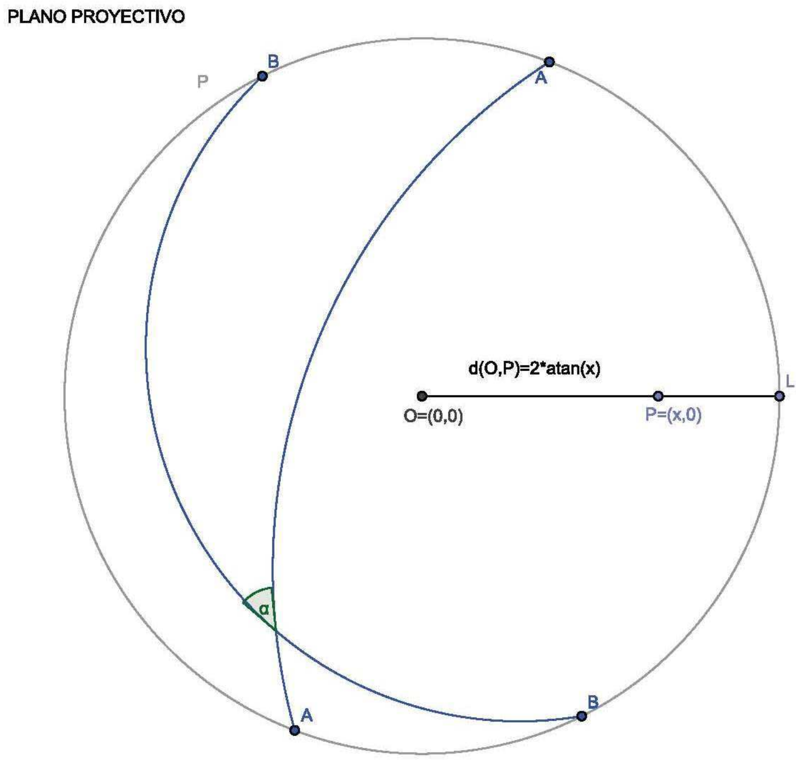


En cuanto a la Geometría Esférica o Proyectiva, el modelo más natural de Plano Proyectivo lo constituye la propia esfera, tomando como puntos las parejas de puntos antipodales y como rectas las circunferencia maximales, que son las geodésicas de la esfera vista como superficie inmersa en el espacio Euclídeo tridimensional. La distancia entre dos puntos vendría dada por la longitud del arco de geodésica más corto que une ambos puntos. Nótese que esta métrica está acotada y tiene como valor máximo $\pi/2$.

A partir de este modelo podemos construir un modelo plano y conforme mediante la proyección estereográfica desde el polo sur sobre el plano ecuatorial. Como todo punto proyectivo tiene al menos un representante en el hemisferio superior (incluido el ecuador), el disco unidad cerrado contiene en su interior un representante de cada punto no ecuatorial y su frontera, la circunferencia unidad P, contiene a los dos representantes de cada punto del ecuador.



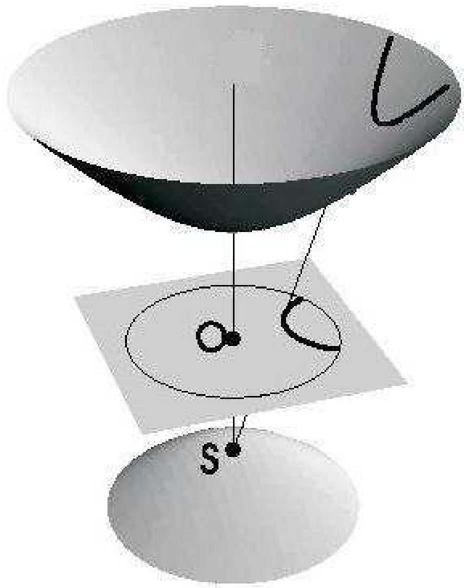
Así obtenemos un modelo del Plano Proyectivo cuyos puntos son los puntos del interior del disco unidad más las parejas de puntos antipodales de la circunferencia unidad; sus rectas vienen dadas por los arcos de circunferencia generalizada que cortan a la circunferencia unidad en puntos diametralmente opuestos más la propia circunferencia unidad. Nótese que todas lar rectas proyectivas son líneas cerradas de longitud π.



Nota: La proyección estereográfica de $S^2=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$, la esfera de radio 1, desde el polo sur S=(0,0,-1) sobre el plano z=0 coincide con la restricción a S^2 de la inversión del espacio con respecto a la esfera de ecuación $x^2+y^2+(z+1)^2=2$. En efecto, dicha inversión transforma esferas generalizadas en esferas generalizadas, envía el polo sur S=(0,0,-1) al infinito, con lo que S^2 se transforma en un plano y deja invariante la intersección $S^2\cap[\ x^2+y^2+(z+1)^2=2]$, esto es, la circunferencia unidad en el plano z=0.
Esto nos permite afirmar que es una aplicación conforme que transforma circunferencias generalizadas en circunferencias generalizadas.

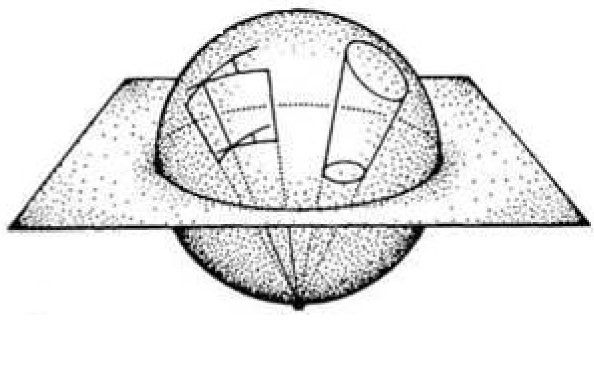
3.- Punto de vista unificador

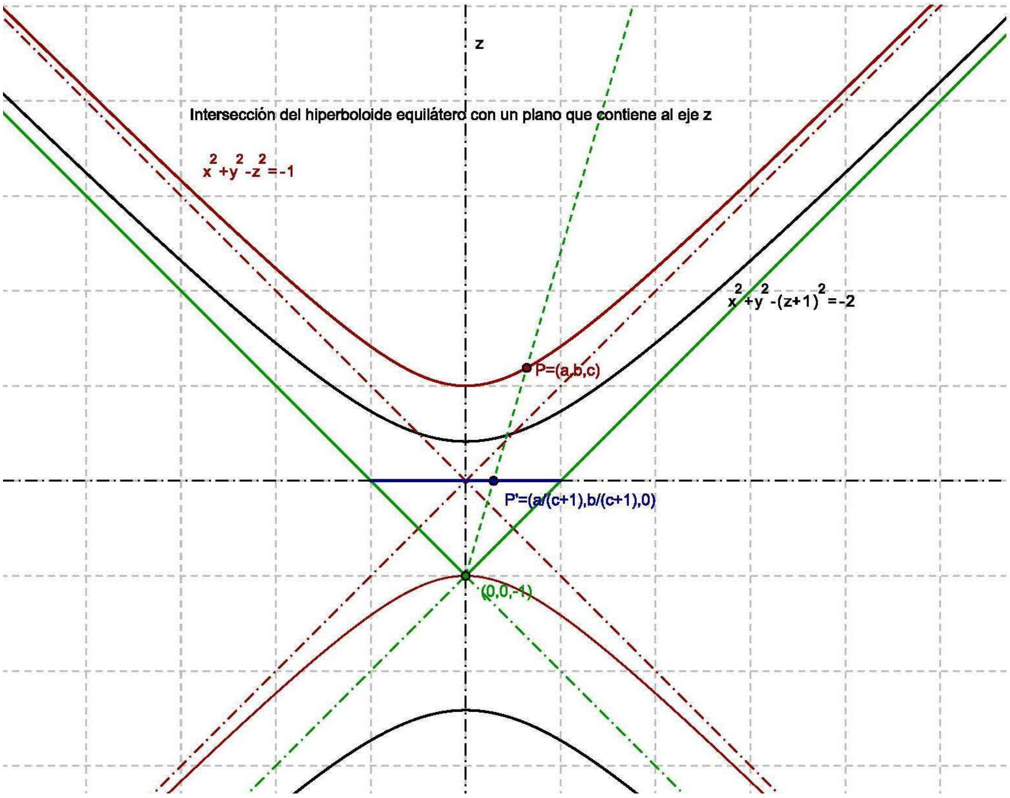
Es sabido que si consideramos el espacio tridimensional real dotado con la métrica de Lorentz en donde la distancia entre dos puntos $A=(a_1,a_2,a_3)$ y $B=(b_1,b_2,b_3)$ viene dada por $d(A,B)^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2-(b_3-a_3)^2$, la *esfera* de radio $i=\sqrt{(-1)}$ centrada en el origen O=(0,0,0), esto es, el conjunto de puntos del espacio tridimensional a distancia $i=\sqrt{(-1)}$ del origen O, es un hiperboloide equilátero de dos hojas que hereda una métrica Riemaniana de curvatura constante $\chi=-1$ y por tanto cada una de sus componentes conexas constituye un modelo de Espacio Hiperbólico bidimensional. Además, como en este caso el hiperboloide tiene intersección vacía con el plano z=0 la identificación de puntos antipodales no añade ni quita nada al modelo que supone cada una de sus hojas por separado.



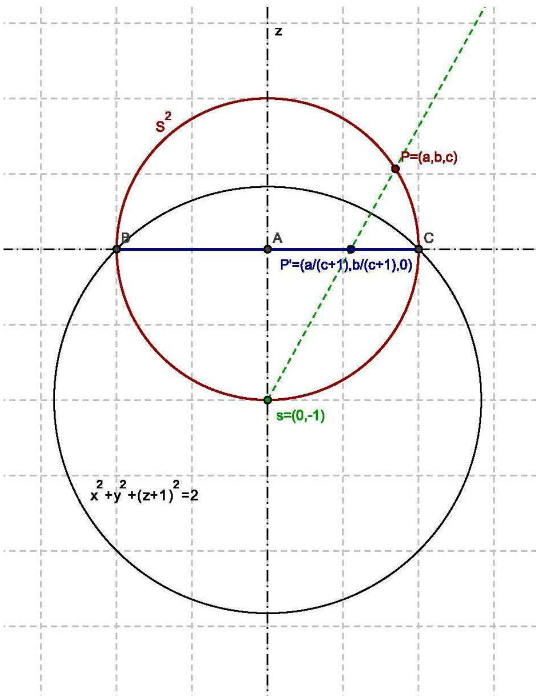
Pues bien, si ahora consideramos la proyección estereográfica desde el polo sur S=(0,0,-1) sobre el plano z=0 de la hoja superior del hiperboloide, recuperamos el modelo del disco de Poincaré del Plano Hiperbólico. Las *rectas* de la hoja superior del hiperboloide, curvas generadas al intersecar este último con planos que pasan por el origen O=(0,0,0), se proyectan en arcos de circunferencia del interior del disco unidad ortogonales a la circunferencia frontera de dicho disco.

Es más, esta proyección estereográfica restringida al hiperboloide equilátero unitario de dos hojas puede verse como una *inversión* del espacio de Lorentz con respecto a la *esfera* de centro S=(0,0,-1) y de radio √(-2), esto es, como la restricción al hiperboloide de la inversión del espacio con respecto al hiperboloide equilátero de ecuación $x^2+y^2-(z+1)^2=-2$, si medimos las distancias con la métrica de Lorentz. Obtenemos así una clara analogía con el modelo del disco del Plano Proyectivo.



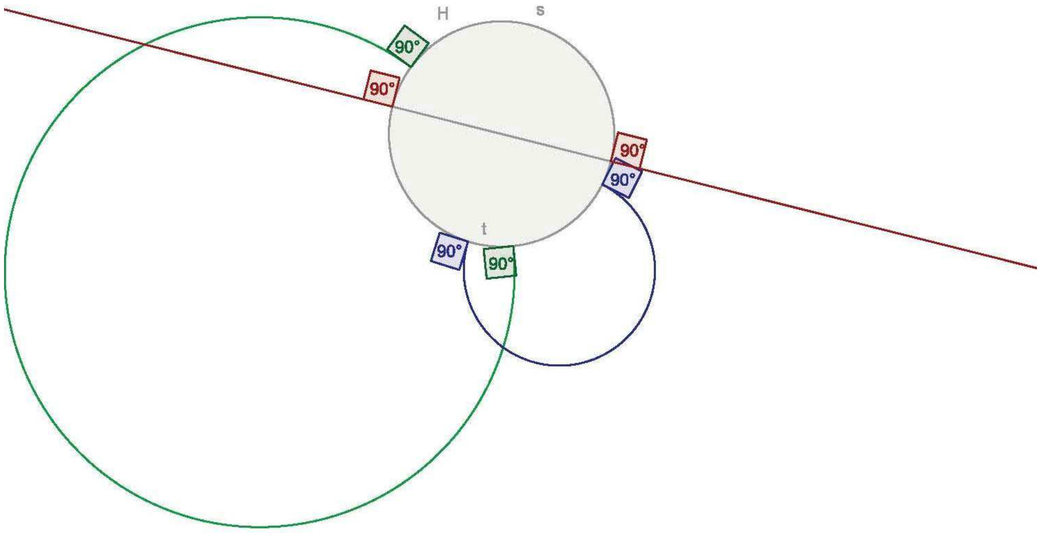


Sección de la proyección estereográfica del hiperboloide equilátero de radio i.

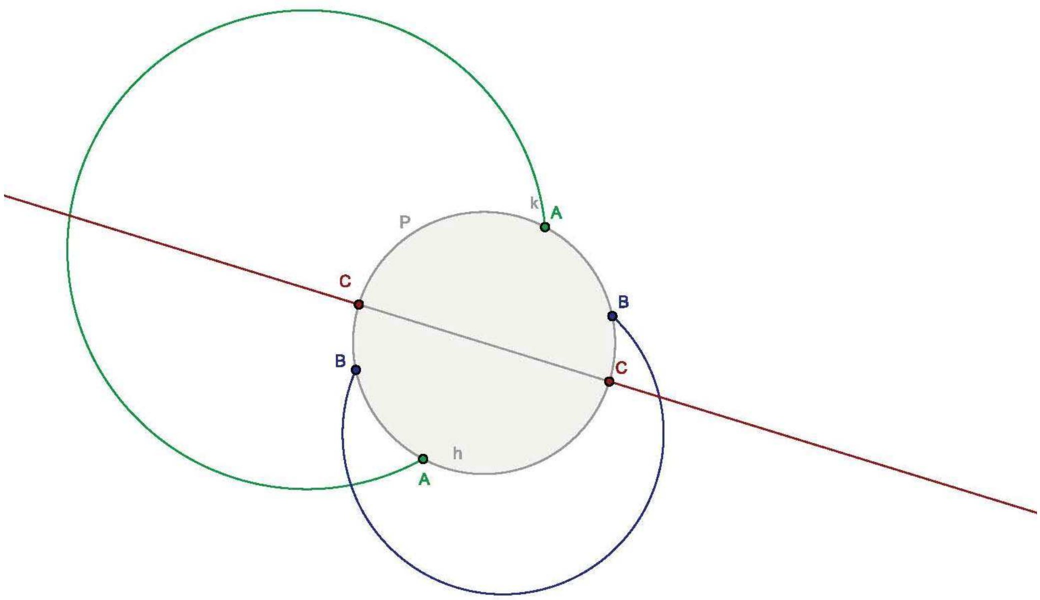


Sección de la proyección estereográfica de la esfera de radio 1.

Nota: Obsérvese que tanto en el caso del Plano Proyectivo como en el del Plano Hiperbólico, si consideramos los representantes de cada punto contenidos en el semiespacio z≤0 la proyección estereográfica desde el polo sur S=(0,0,-1) nos proporciona otros modelos planos, conformes, incompletos (el polo sur no tiene imagen mediante la proyección estereográfica) y no acotados del los Planos Proyectivo e Hiperbólico.



Modelo conformes, incompleto y no acotado del Plano Hiperbólico y Proyectivo.

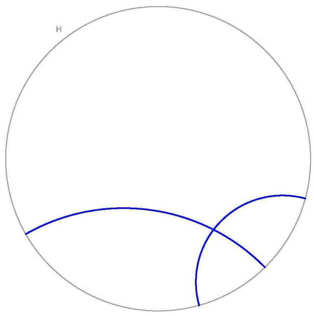


Modelo conformes, incompleto y no acotado del Plano Hiperbólico y Proyectivo.

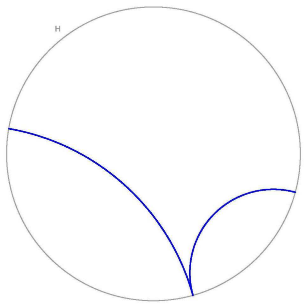
4.- Sobre el Plano Hiperbólico y el disco de Poincaré

Es este apartado veremos algunas peculiaridades del Plano Hiperbólico y cómo se plasman en el modelo del disco de Poincaré.

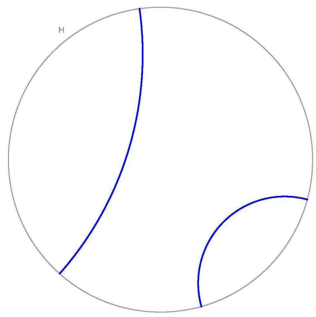
- En primer lugar observemos que dos rectas del Plano Hiperbólico tienen tres posibles **posiciones relativas**, a saber: o bien son *secantes*, esto es, se cortan en un punto, o bien son *paralelas*, esto es, convergen asintóticamente a un mismo punto del infinito, o bien son *ultraparalelas*, esto es, son disjuntas incluso en sus prolongaciones hasta la recta del infinito. Así, el postulado correspondiente al de las paralelas para la Geometría Hiperbólica quedaría enunciado de la siguiente forma: *por un punto exterior a una recta se pueden trazar dos paralelas a dicha recta y una cantidad infinita de ultraparalelas.*



Rectas secantes



Rectas paralelas



Rectas ultraparalelaS

- En segundo lugar diremos que **el grupo de isometrías del Plano Hiperbólico** actúa sobre el mismo transitivamente, esto es, dados dos puntos cualesquiera A y B del Plano Hiperbólico, existe al menos una isometría del mismo que transforma A en B.

Aunque los puntos del Plano Hiperbólico considerado en abstracto son indistinguibles por ser éste un espacio homogéneo, sin embargo, en el modelo del Disco de Poincaré existe un punto distinguido, el centro O=(0,0,0), que tiene la propiedad de que las rectas que pasan por el se representan por diámetros del disco unidad. Esta propiedad será de gran utilidad a la hora de construir herramientas en el Plano Hiperbólico pues nos permitirá construir las herramientas en el centro y luego trasladarlas mediante una isometría a cualquier otro punto del Plano Hiperbólico.

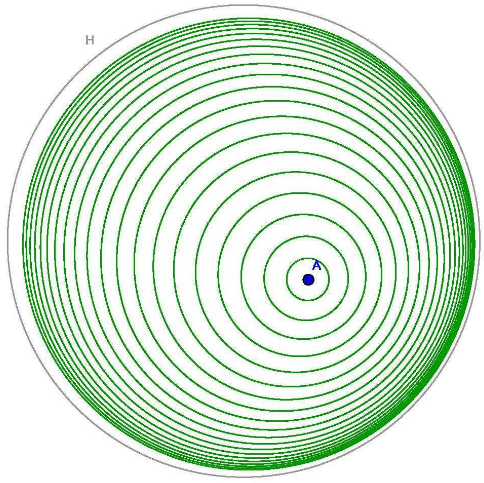
- El grupo de isometrías del Plano Hiperbólico está generado por las **reflexiones en rectas** hiperbólicas. La acción de la reflexión en una recta hiperbólica viene dada, en el modelo del Disco de Poincaré, por la inversión con respecto a la circunferencia generalizada de la cual es un arco la recta dada.

Al ser el Plano Hiperbólico una superficie orientable las isometrías del mismo se clasifican en dos grandes grupos, a saber, aquellas que invierten la orientación que podrán expresarse como composición de un número impar de reflexiones, y aquellas que conservan la orientación, que serán el resultado de componer un número par de reflexiones.

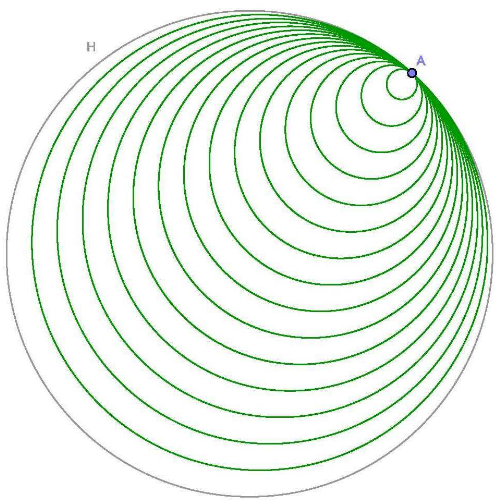
- Más aún, toda isometría del Plano Hiperbólico puede expresarse como composición de **a lo más tres reflexiones**. De aquí se colige que toda isometría distinta de la identidad que conserva la orientación del Plano Hiperbólico es la composición de dos reflexiones del Plano Hiperbólico con respecto a dos rectas hiperbólicas diferentes.

En función de cual sea la posición relativa de esas dos rectas, podemos clasificar las isometrías del Plano Hiperbólico en tres categorías: rotaciones, rotaciones límite y traslaciones.

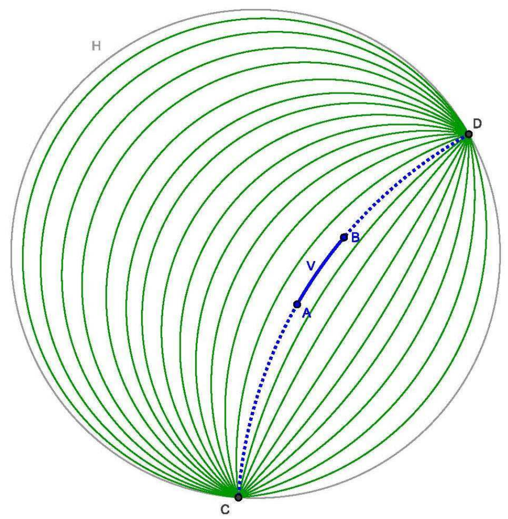
Una **rotación** viene dada por la composición de dos reflexiones en rectas secantes. Deja fijo un punto del Plano Hiperbólico, el centro de rotación, y deja invariantes, globalmente, a todas las circunferencias hiperbólicas centradas en dicho punto.



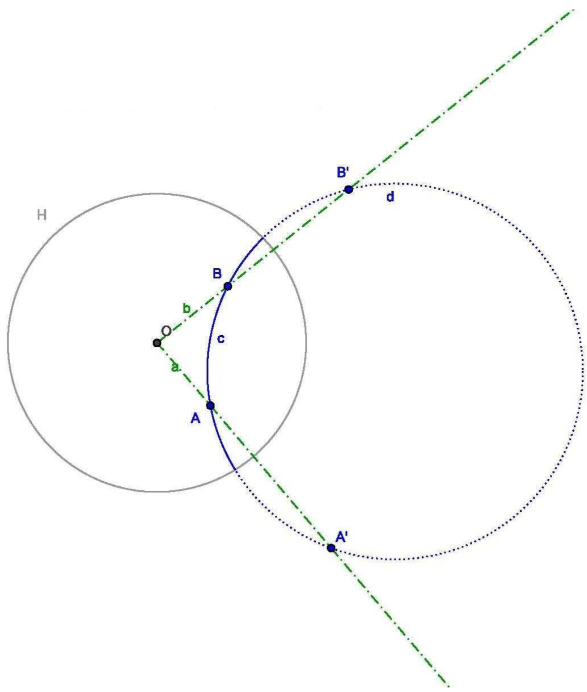
Una **rotación límite** viene dada por la composición de dos reflexiones en rectas paralelas. Mueve todos los puntos del Plano Hiperbólico y únicamente deja fijo un punto de la circunferencia del infinito al que llamaremos centro de la rotación límite. Las rotaciones límite dejan invariantes los *horociclos* (cónicas del Plano Hiperbólico tangentes al infinito) cuyo punto de tangencia es el centro de rotación.



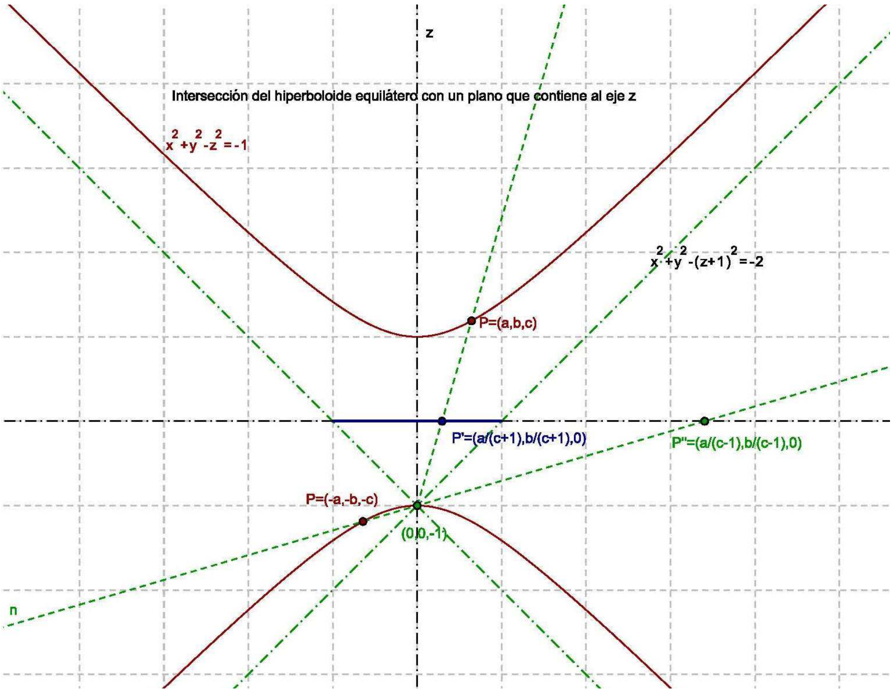
Una **traslación** viene dada por la composición de dos reflexiones en rectas ultraparalelas. Mueve todos los puntos del Plano Hiperbólico y únicamente deja fijos dos puntos de la circunferencia del infinito que son los puntos del infinito de la recta que contiene al *vector de traslación*, esto es, la única recta que es simultáneamente perpendicular a los dos ejes de reflexión. Las traslaciones dejan globalmente invariantes a la recta que contiene al vector de traslación y a su offset, esto es a todas las curvas paralelas a la misma que son cónicas que convergen asintóticamente con dicha recta por ambos extremos.



- Si A es un punto del modelo del Disco de Poincaré del Plano Hiperbólico y llamamos A’ al inverso de A con respecto a la circunferencia H de los puntos del infinito, entonces toda recta hiperbólica que pasa por A es la intersección con el Disco de Poincaré de una circunferencia que pasa también por A’.

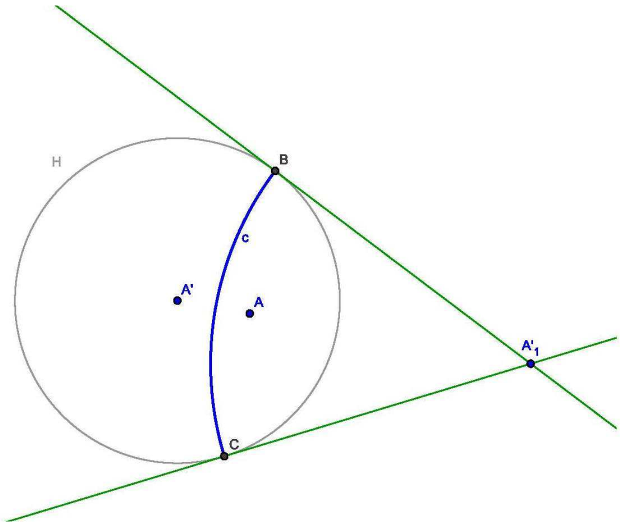


Esta propiedad se debe a que A’ es la proyección estereográfica del opuesto del punto cuya proyección estereográfica es A y nos será de gran utilidad en la construcción de herramientas.



- La reflexión en una recta hiperbólica en el modelo del Disco de Poincaré coincide con la inversión con respecto a la circunferencia generalizada de la cual es un segmento circular la recta hiperbólica dada. Esto es consecuencia del hecho de que las inversiones son transformaciones conformes que llevan circunferencias generalizadas en circunferencias generalizadas y al hecho de que las rectas hiperbólicas del modelo intersecan ortogonalmente a la circunferencia límite.

- Otra propiedad del modelo del Disco de Poincaré que nos será de gran utilidad a la hora de construir herramientas es la siguiente: si A es un punto distinto del centro del disco y A’ es el inverso de A con respecto de la circunferencia del infinito, entonces la recta hiperbólica obtenida al intersecar el disco con la circunferencia ortogonal al mismo de centro A’ tiene la propiedad de que al hacer la reflexión en ella, el punto A se transforma en el centro O=(0,0,0). En efecto, como se ha dicho anteriormente, la reflexión en dicha recta coincide con la inversión con respecto a la circunferencia del la cual la recta hiperbólica es un segmento circular; ahora bien, A’ es el centro de dicha circunferencia y por tanto no tiene imagen mediante la inversión así que toda circunferencia que pasa por A’ se transforma en una recta, por tanto, toda recta hiperbólica que pasa por A y cuya prolongación pasa por A’ se transforma en una recta hiperbólica intersección del disco con una recta que pasa por el transformado de A y esto sólo sucede cuando dicho punto es el centro del disco.



La reflexión en c transforma A en el centro del disco

- Si A y B son dos puntos del Disco de Poincaré de coordenadas z_1 y z_2 respectivamente vistos como puntos del la recta compleja, entonces la distancia hiperbólica entre A y B viene dada por la siguiente expresión:

$$d(A,B)=\operatorname{atanh}\{|(z_2-z_1)/(1-\overline{z}_1 z_2)|\}$$

Como se ha hecho observar anteriormente, a la hora de construir herramientas nos basta con conocer la fórmula de la distancia restringida al caso de que uno de los puntos sea el centro del disco O=(0,0,0). En este caso tenemos:

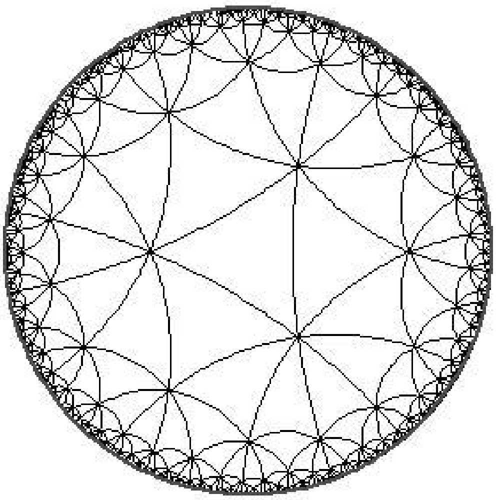
$$d(O,A)=\operatorname{atanh}(|z|)$$

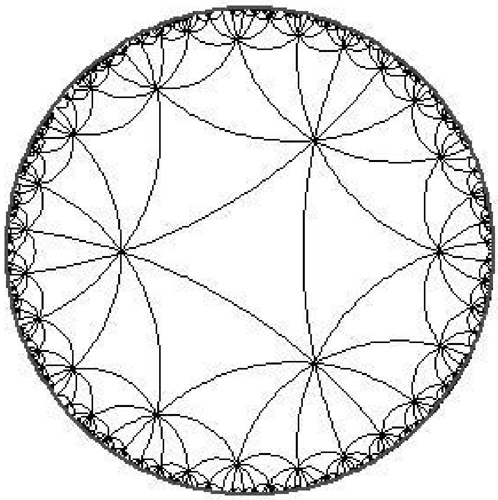
en donde z es la coordenada de A como punto de la recta compleja.

- Una **circunferencia hiperbólica**, esto es, el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia hiperbólica a un punto dado llamado centro es una cantidad dada constante llamada radio, viene representada en el modelo del Disco de Poincaré por una circunferencia. Esa afirmación resulta evidente para circunferencias hiperbólicas con centro en el centro del disco. Ahora bien, teniendo en cuenta que el grupo de isometrías del Plano Hiperbólico actúa sobre éste transitivamente y que las reflexiones en rectas que generan dicho grupo son de hecho inversiones con respecto a circunferencias y que por tanto transforman circunferencias en circunferencias se sigue que la afirmación anterior es cierta para cualquier punto del Disco de Poincaré.

- Un **triángulo hiperbólico** viene determinado por tres puntos del Plano Hiperbólico no contenidos simultáneamente en ninguna recta hiperbólica A, B y C y los segmentos hiperbólicos determinados por dichos puntos tomados dos a dos, a=BC, b=CA y c=AB. Una propiedad que verifica el Plano Hiperbólico es que la suma de los ángulos de cualquier triángulo hiperbólico es estrictamente menor que π y, además, la diferencia entre dicha suma y π aumenta a medida que lo hace el tamaño del triángulo. Llamamos *defecto* *esférico* a dicha diferencia y nos proporciona una medida de superficie en el Plano Hiperbólico. Tenemos así que el área de un triángulo hiperbólico de ángulos α, β y γ es igual a π-(α+β+γ).

Nótese que en la Geometría Hiperbólica no existe el concepto de semejanza de triángulos ya que si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes iguales entonces tienen la misma área. Nótese asimismo que con ayuda de regla y compás hiperbólicos podemos construir triángulos equiláteros con lados de cualquier longitud mayor que cero, cuyos ángulo irán disminuyendo a medida que aumente la longitud de sus lados, variando entre $\pi/3$ y 0, no alcanzándose ninguno de los extremos del intervalo. En particular para cualquier $n\geq 7$ existen triángulos hiperbólicos equiláteros cuyos ángulos miden exactamente $2\pi/n$. Estos triángulos hiperbólicos, mediante sucesivas reflexiones en los lados generan **teselaciones** del Plano Hiperbólico mediante triángulos hiperbólicos equiláteros en las que en cada vértice inciden n triángulos.

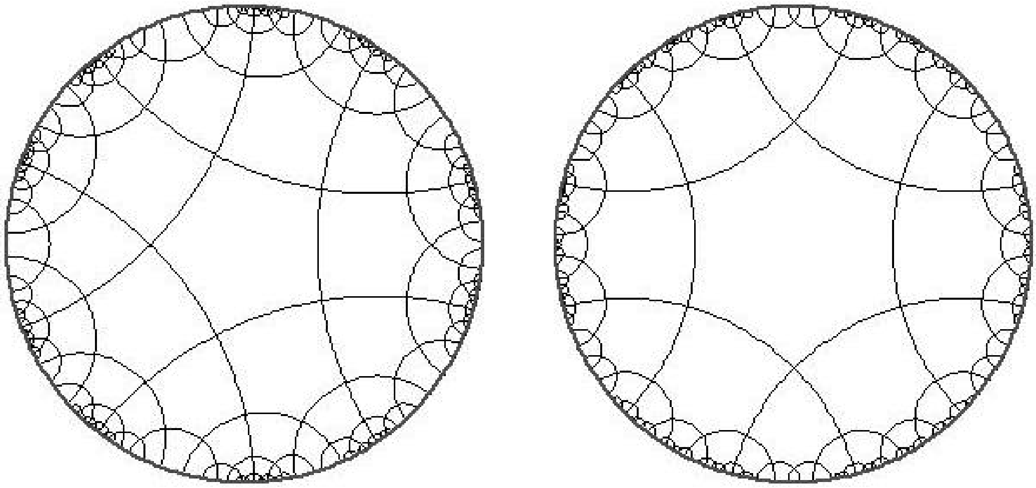




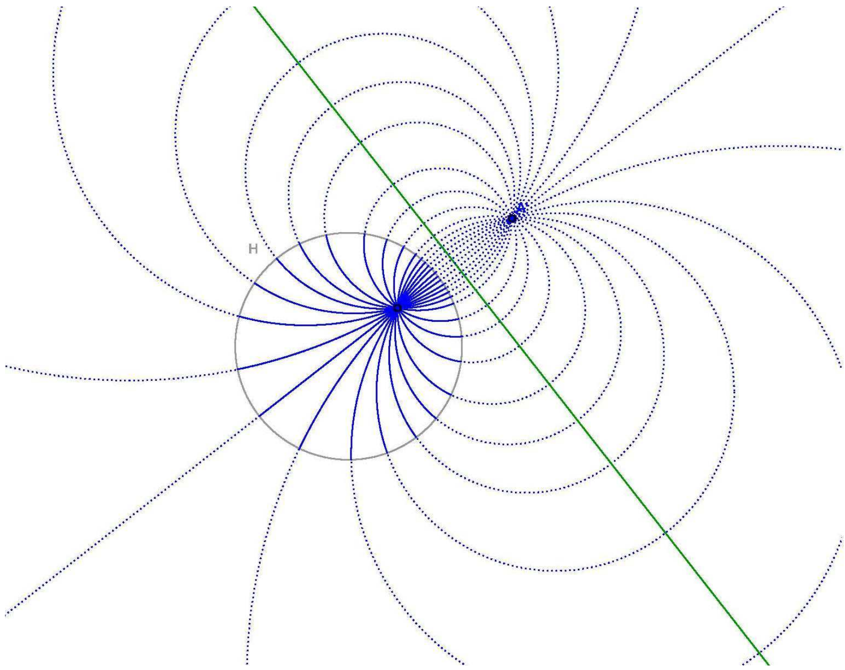
- De modo análogo, a lo que les sucede a los triángulos hiperbólicos, si n es un número natural mayor o igual que 4 todo **polígono hiperbólico** de n lados tiene la propiedad de que la suma de sus ángulos es estrictamente menor que $\pi(n-2)$. Además, si llamamos α_1, α_2,...α_n a dichos ángulos el área del polígono hiperbólico de n lados es igual a $\pi(n-2)-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)$.

Así, nuevamente de modo análogo al caso de los triángulos hiperbólicos equiláteros, podemos afirmar que para cada $n\geq 4$ existen n-gonos regulares con lados de cualquier longitud mayor que cero, cuyos ángulo irán disminuyendo a medida que aumente la longitud de sus lados, variando entre $\pi(n-2)/n$ y 0, no alcanzándose ninguno de los extremos del intervalo.

Determinemos ahora cuáles son las teselaciones del Plano Hiperbólico mediante n-gonos regulares. Sabemos que existen n-gonos regulares con ángulos de cualquier medida menor que $\pi(n-2)/n=2\pi(n-2)/2n$. Así, si llamamos G(n) a la parte entera de $2n/(n-2)$ podemos afirmar que para cada $m> G(n)$ existen n-gonos hiperbólicos regulares cuyos ángulos miden $2\pi/m$. Estos n-gonos hiperbólicos, mediante sucesivas reflexiones en sus lados generan teselaciones del Plano Hiperbólico mediante n-gonos hiperbólicos regulares en las que en cada vértice inciden m n-gonos. Ahora bien, para todo n≥7 G(n)<3, que es el menor número de incidencia posible en los vértices de una teselación regular, por lo tanto existen teselaciones por cuadrados hiperbólicos regulares con números de incidencia en cada vértice igual o mayor que 5; existen teselaciones por pentágonos y hexágonos hiperbólicos regulares con números de incidencia en cada vértice igual o mayor que 4 y para todo n≥7 existen teselaciones por n-gonos hiperbólicos regulares con números de incidencia en cada vértice igual o mayor que 3.



- Finalmente, para cerrar este apartado sobre el Plano Hiperbólico y el disco de Poincaré definiremos un lugar geométrico que nos será de utilidad para la construcción de herramientas de Geometría Hiperbólica en GeoGebra.



Si A es un punto del Disco de Poincaré distinto del centro y A' es el inverso de A con respecto a la circunferencia del infinito, el lugar geométrico de todos los puntos del plano que son centros de las circunferencias del plano cuya intersección con el Disco de Poincaré da lugar a las rectas hiperbólicas que pasan por A es la mediatriz del segmento de extremos A y A'. Llamaremos a esta recta *recta de los centros de A*. Obsérvese que dicha recta tiene siempre intersección vacía con el Disco de Poincaré.

5.- Sobre el Plano Proyectivo y su representación en el disco unidad

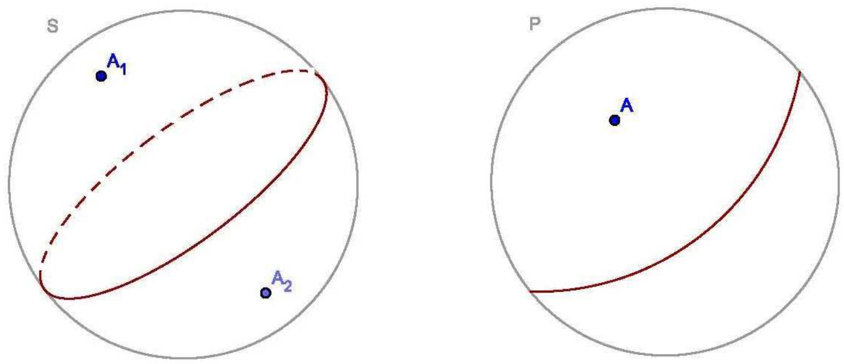
Es este apartado veremos algunas peculiaridades del Plano Proyectivo y cómo se plasman en el modelo del disco unidad. Por ser el Plano Proyectivo un espacio cociente obtenido por la identificación de puntos antipodales de la esfera unidad, comenzaremos viendo algunas peculiaridades de la esfera como espacio topológico métrico y cómo pasan éstas al Plano Proyectivo.

- Comenzaremos viendo el comportamiento de la función distancia entre dos puntos. En la esfera la función distancia está acotada por el valor π que se alcanza sólo en el caso de puntos antipodales. Al identificar puntos antipodales para obtener como espacio cociente el Plano Proyectivo, debemos definir la función distancia a partir de la función de distancia en la esfera. Así, si A y B son dos puntos del Plano Proyectivo y A_1 y A_2, B_1 y B_2 son los puntos de la esfera cuyas clases de equivalencia mediante la identificación antipodal son A y B respectivamente, entonces definimos la distancia entre A y B como sigue:

$$d(A,B)= \min [\delta (A_i,B_j)] \quad i, j \in \{1,2\}$$

en donde δ denota la distancia esférica. Esta función distancia también está acotada pero en este caso el valor máximo que alcanza es $\pi/2$.

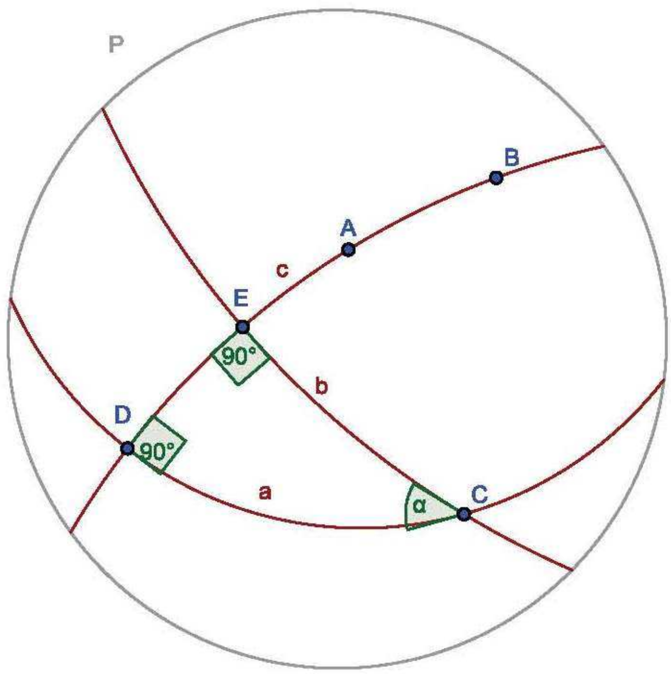
- Cabe preguntarse ahora cuál es el lugar geométrico de los puntos del Plano Proyectivo situados a distancia proyectiva $\pi/2$ de un punto dado A. De la propia definición deducimos que son los puntos del Plano Proyectivo que provienen de los puntos de la esfera cuya distancia δ a los puntos A_1 y A_2, cuya clase de equivalencia mediante la identificación antipodal es A, es $\pi/2$; esto es, los puntos de la circunferencia maximal contenida en el plano perpendicular al diámetro de extremos A_1 y A_2 que pasa por el centro de la esfera.



Llamaremos a esta circunferencia maximal *circunferencia polar* de los puntos A_1 y A_2, y llamaremos **recta polar de A** a la recta proyectiva a que da lugar. Podemos responder pues, que el lugar geométrico de los puntos del Plano Proyectivo situados a distancia $\pi/2$ de un punto dado A es su recta polar.
Hagamos notar, llegados a este punto, que como toda circunferencia maximal de la esfera unidad que pasa por los puntos antipodales A_1 y A_2 corta ortogonalmente a su circunferencia polar, toda recta proyectiva que pase por A cortará ortogonalmente a su recta polar.

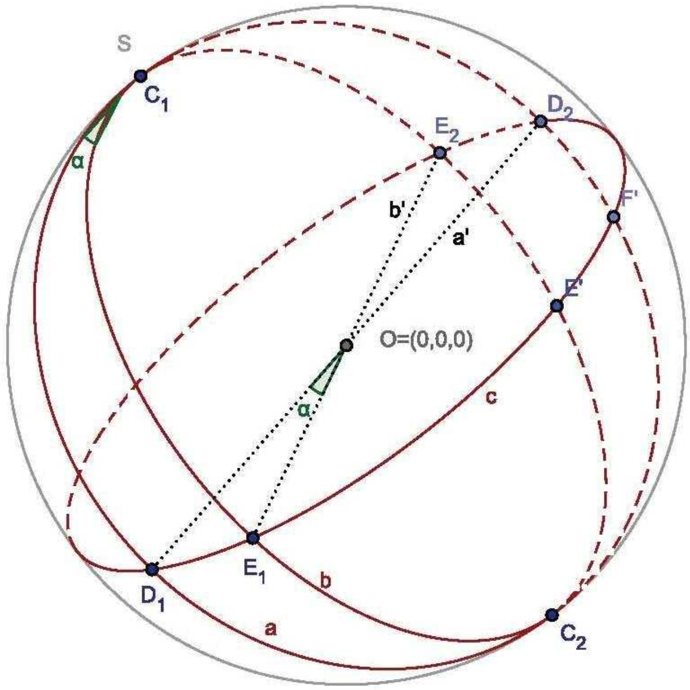
- Recíprocamente, dada una recta proyectiva, el lugar geométrico de los puntos del Plano Proyectivo situados a distancia proyectiva $\pi/2$ de todos los puntos de la recta dada es un único punto, el punto de intersección de todas las polares de los puntos de la recta proyectiva dada. Llamaremos a este punto **polo** de la recta en cuestión. De hecho, la aplicación que a cada punto del Plano Proyectivo le hace corresponder su recta polar es una **correlación**.

- La correlación definida en el punto anterior nos permite definir una función distancia en el conjunto de rectas del Plano Proyectivo. En efecto si a y b son dos rectas proyectivas y A y B son sus polos respectivos definimos la distancia proyectiva entre a y b como la distancia proyectiva entre A y B. ¿Qué significado geométrico tiene esta función distancia? Veámoslo.



Sea C el punto de intersección de a y b, y sea c la polar de C. Nótese que A y B son puntos de c. Sean D y E, respectivamente, los puntos de intersección de a y c de b y c. Como a y b pasan por C, cortan ortogonalmente a c en D y E

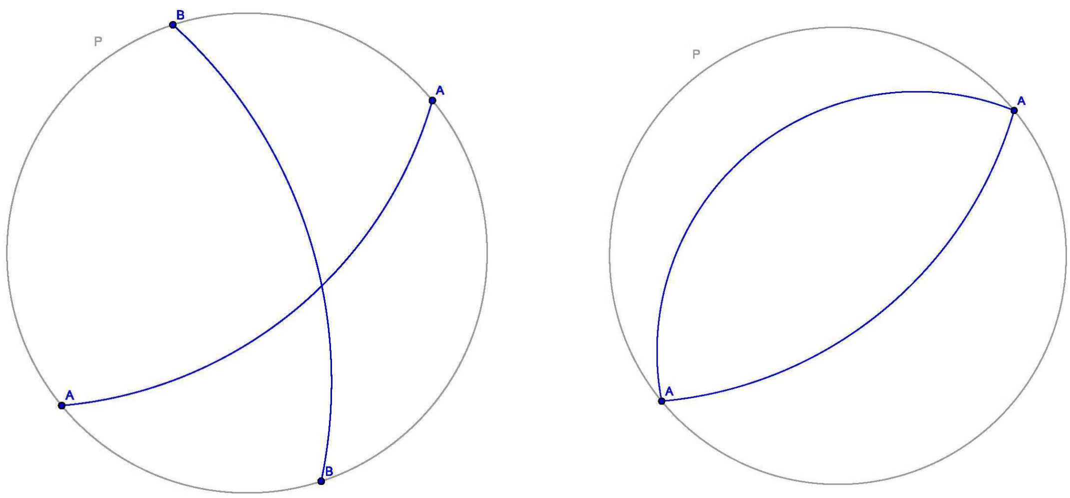
respectivamente. Por estar D en a, d(A,D)= $\pi/2$. Análogamente, d(B,E)= $\pi/2$. Al ser A, B, D y E puntos alineados del Plano Proyectivo podemos concluir que d(D,E)= d(A,B). Así podemos responder que la distancia proyectiva entre dos rectas proyectivas es igual a la distancia entre los puntos de intersección de dichas rectas proyectivas con la recta proyectiva perpendicular a ambas simultáneamente.
Traslademos ahora esta situación a la esfera unidad.



Si D_1 y E_1 son dos puntos de la esfera primitivos de D y E que verifican que d(D,E)= $\delta(D_1,E_1)$, por estar D_1 y E_1 en una misma circunferencia de radio 1 sabemos que la longitud del arco que los une es igual a la medida en radianes del ángulo que forman los radios desde el centro de la circunferencia hasta cada uno de ellos. Así, $\delta(D_1,E_1)=\alpha$. Pero α es también el ángulo que forman las circunferencias maximales que dan lugar a las rectas proyectivas a y b y, como el modelo del disco del Plano Proyectivo es conforme, es también el ángulo que forman las rectas proyectivas a y b. Concluimos así diciendo que la distancia proyectiva entre dos rectas proyectivas es igual a la medida en radianes del menor de los ángulo que determinan ambas rectas.
Podemos afirmar también por tanto, que la distancia proyectiva entre dos puntos del Plano Proyectivo es igual a la medida en radianes del menos de los ángulos que forman sus polares.

- Observemos que dos rectas del Plano Proyectivo tienen una sola **posición relativa** posible: siempre son *secantes*, esto es, se cortan en un punto, Así, el postulado correspondiente al de las paralelas para la Geometría Proyectiva quedaría enunciado de la siguiente forma: *por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna paralela a dicha recta.*

Notemos que a diferencia del modelo del Disco de Poincaré para la Geometría Hiperbólica, en el modelo del disco del Plano Proyectivo los puntos de la circunferencia fronteriza son puntos propios del Plano Proyectivo y por tanto, dos rectas proyectivas que se cortan en la circunferencia unidad son secantes.



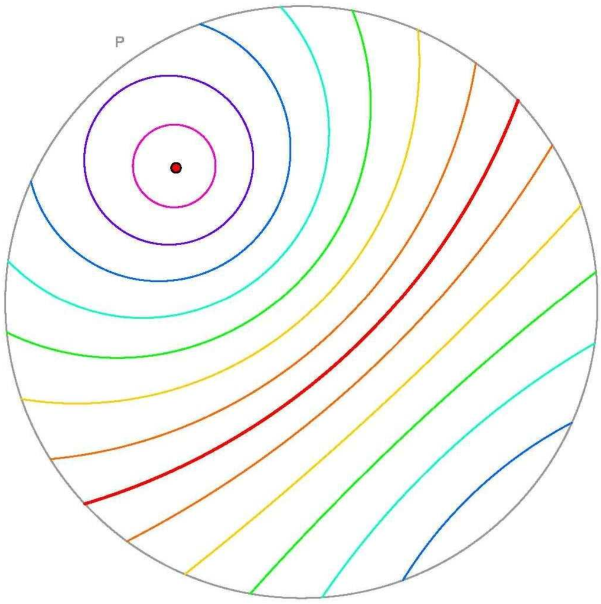
- El **grupo de isometrías del Plano Proyectivo** actúa sobre el mismo transitivamente, esto es, dados dos puntos cualesquiera A y B del Plano Proyectivo, existe al menos una isometría del mismo que transforma A en B. Así el Plano Proyectivo es un espacio homogéneo.

Aunque los puntos del Plano Proyectivo considerado en abstracto son indistinguibles por ser éste un espacio homogéneo, en el modelo del disco unidad con puntos antipodales de la circunferencia frontera identificados existen puntos distinguidos; a saber, el centro O=(0,0,0), que tiene la propiedad de que las rectas que pasan por él se representan por diámetros del disco unidad con extremos identificados, y los puntos de la circunferencia frontera del disco por aparecer duplicados en el modelo. La singularidad del centro del disco nos será de gran utilidad a la hora de construir herramientas en el Plano Proyectivo pues nos permitirá construirlas en el centro y luego trasladarlas mediante una isometría a cualquier otro punto del Plano Proyectito.

- El grupo de isometrías del Plano Proyectivo es el grupo cociente del grupo de isometrías de la esfera entre el subgrupo generado por la reflexión en el centro de la esfera, que únicamente contiene dos elementos: la reflexión antipodal y la identidad. El grupo de isometrías de la esfera está generado por las **reflexiones en circunferencias maximales**, esto es, por la restricción a la esfera de reflexiones en planos que pasan por el centro de la misma. Más aún, toda isometría de la esfera puede expresarse como composición de a lo más tres reflexiones.

Ahora bien, la esfera es una superficie orientable y las reflexiones son isometrías que invierten la orientación, con lo cual las únicas isometrías que conservan la orientación de la esfera son aquellas que pueden expresarse como composición de dos reflexiones. La composición de dos reflexiones en circunferencias maximales es una **rotación** en torno al eje determinado por los dos puntos de corte de las circunferencias maximales dadas.

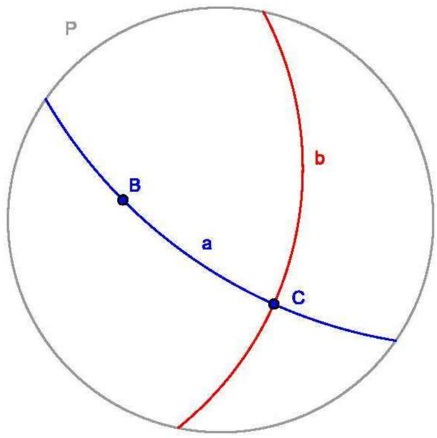
Por otra parte, toda isometría del Plano Proyectivo proviene de dos isometrías de la esfera, siendo cada una de ellas el resultado de componer la otra con la reflexión antipodal. Como la reflexión antipodal es una isometría que invierte la orientación, podemos concluir que una de esas dos isometrías de la esfera conserva la orientación y por lo tanto es una rotación. Por tanto podemos decir que todas las isometrías del Plano Proyectivo son **rotaciones proyectivas**, esto es el paso al cociente de rotaciones de la esfera. Notemos que al ser el Plano Proyectivo una superficie no orientable, no podemos hablar de isometrías que conserven o inviertan su orientación.
Una rotación en la esfera deja fijo un par de puntos antipodales y globalmente invariante su circunferencia polar. También quedan invariantes, globalmente, todas las circunferencias centradas en dichos puntos y paralelas a su polar. De aquí deducimos que toda isometría del Plano Proyectivo tiene un punto fijo y deja globalmente invariantes a su recta proyectiva polar y a todas las circunferencias proyectivas centradas en él.



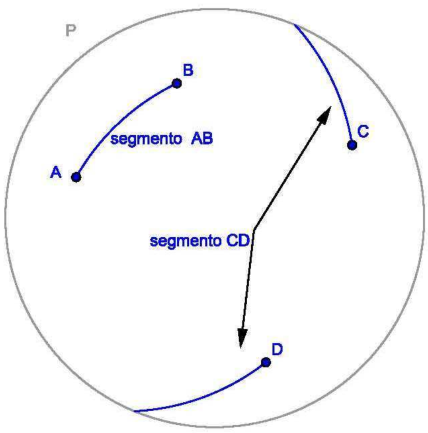
En el caso particular de una rotación de 180ª, la recta polar del centro de rotación queda invariante, no sólo globalmente, sino punto a punto. Si A es un punto del Plano Proyectivo y A_1 y A_2 son los puntos de la esfera que dan lugar a A por la identificación antipodal, entonces, las dos isometrías de la esfera que dan lugar a la rotación proyectiva de 180º en torno a A son la rotación de 180º en torno al eje determinado por A_1 y A_2, y la reflexión con respecto a la circunferencia polar de A_1 y A_2. La primera de ellas lleva cada punto de la circunferencia polar de A_1 y A_2 a su punto antipodal y la segunda fija todos los puntos de la misma. Así, la rotación de 180º en torno a A, que también puede verse como una reflexión proyectiva con respecto a la recta polar de A, deja fijos todos los puntos de esta última.

- Las rectas proyectivas son curvas cerradas de longitud igual a π. En efecto, si a es una recta proyectiva y B es un punto de a, si llamamos b a la polar de

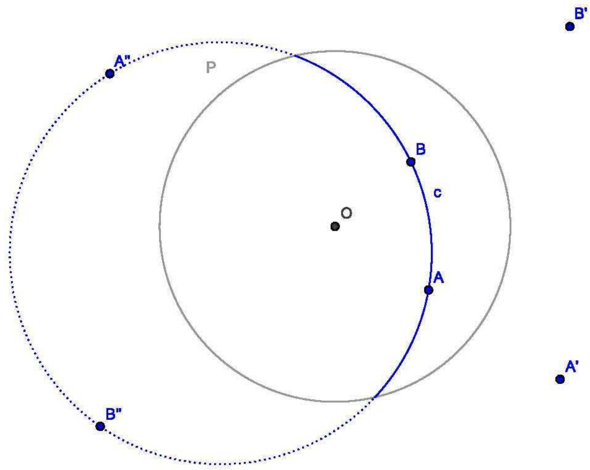
B y C al punto de intersección de a y b, sabemos, por la propia definición de recta polar, que d(B,C)= $\pi/2$. Esto implica que cada una de las dos partes en que B y C dividen a la recta a mide $\pi/2$ y por tanto la longitud de a es π.



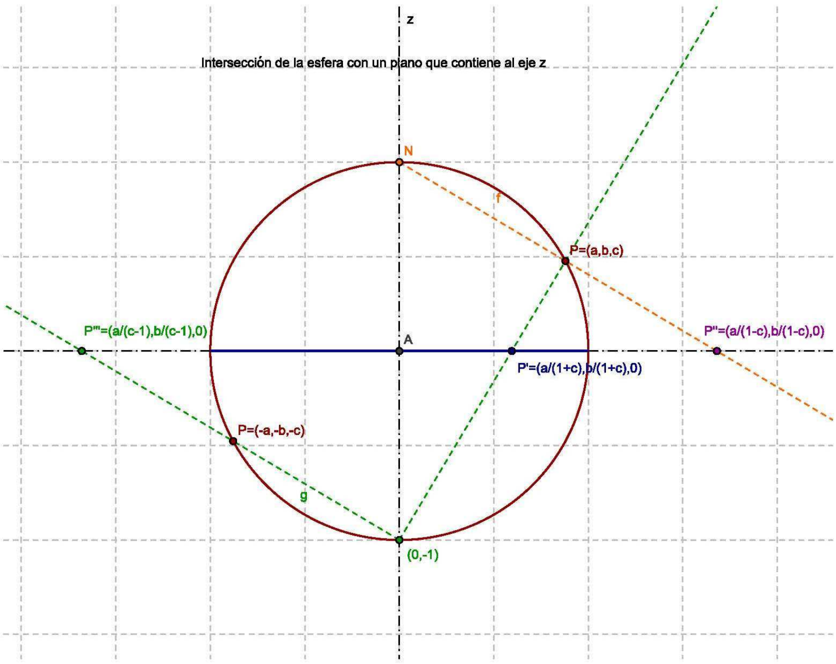
- Teniendo en cuenta que las rectas proyectivas son curvas cerradas homeomorfas a la circunferencia, no tiene sentido hablar de semirrectas proyectivas. Este hecho nos obliga también a ser cuidadosos a la hora de definir segmento proyectivo. En efecto, dos puntos A y B del Plano Proyectivo dividen a la recta proyectiva que determinan en dos componentes cuyas longitudes suman π. Llamaremos **segmento** AB a la componente de menor longitud. En el caso de que ambas componentes midieran $\pi/2$ diremos que el segmento AB no está definido.



- Si A es un punto del modelo del disco del Plano Proyectivo y llamamos A' al inverso de A con respecto a la circunferencia fronteriza y A'' al reflejado de A' con respecto al centro del disco, entonces toda recta proyectiva que pasa por A es la intersección con el disco de una circunferencia que pasa también por A''.

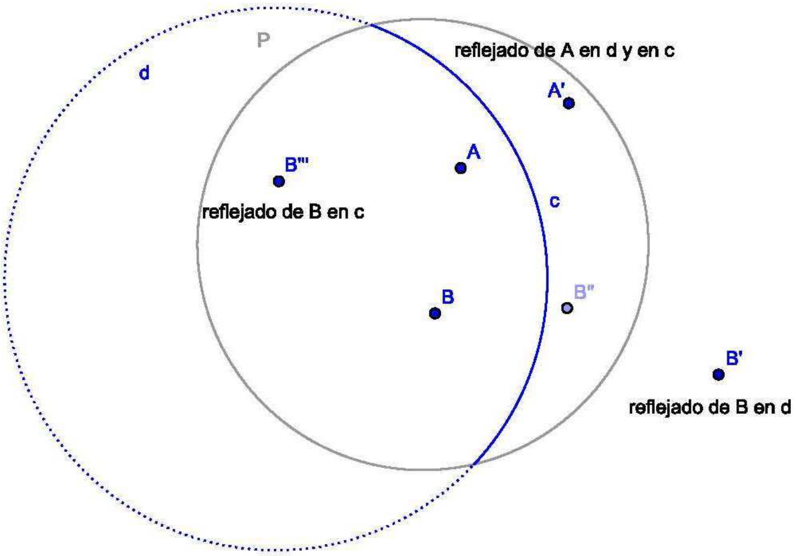


Esta propiedad se debe a que A’’ es la proyección estereográfica del opuesto del punto cuya proyección estereográfica es A y nos será de gran utilidad en la construcción de herramientas.

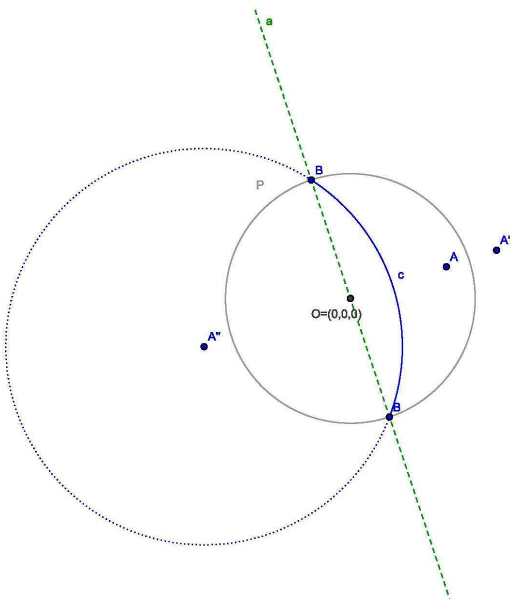


- La reflexión en una recta proyectiva en el modelo del disco coincide con la inversión con respecto a la circunferencia generalizada de la cual es un segmento circular la recta proyectiva dada. Esto es consecuencia del hecho de que las inversiones son transformaciones conformes que llevan circunferencias generalizadas en circunferencias generalizadas. Ahora bien, al no ser las rectas proyectivas del modelo ortogonales a la circunferencia fronteriza, como ocurría en el modelo del Disco de Poincaré del Plano Hiperbólico, no preserva los puntos del interior del disco ni los del exterior.

Así, al hacer la reflexión proyectiva con respecto a una recta proyectiva deberemos determinar si el reflejado de un punto está o no dentro del modelo y si no lo está tomar como punto reflejado al opuesto del inverso con respecto a la circunferencia fronteriza del reflejado del punto.



- Otra propiedad del modelo del disco del Plano Proyectivo que nos será de gran utilidad a la hora de construir herramientas es la siguiente: si A es un punto distinto del centro del disco, A' es el inverso de A con respecto de la circunferencia fronteriza y A'' es el opuesto de A' con respecto al centro del disco, entonces la recta proyectiva obtenida al intersecar el disco con la circunferencia de centro A'' que corta a la frontera del disco en puntos diametralmente opuestos, tiene la propiedad de que al hacer la reflexión p0royectiva en ella, el punto A se transforma en el centro O=(0,0,0).



La reflexión en c transforma A en el centro del disco

En efecto, como se ha dicho anteriormente, la reflexión en dicha recta coincide con la inversión con respecto a la circunferencia del la cual la recta proyectiva es un segmento circular; ahora bien, A'' es el centro de dicha circunferencia y por tanto no tiene imagen mediante la inversión así que toda circunferencia que pasa por A'' se transforma en una recta, por tanto, toda recta proyectiva que pasa por A y cuya prolongación pasa por A'' se transforma en una recta proyectiva intersección del disco con una recta que pasa por el transformado de A y esto sólo sucede cuando dicho punto es el centro del disco.

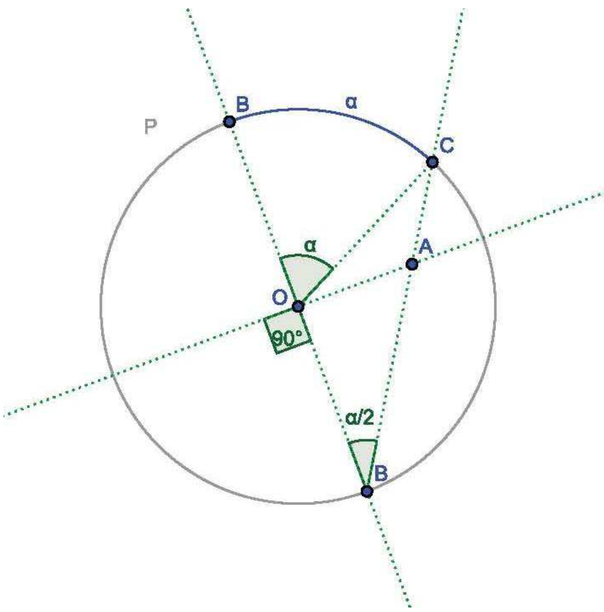
- Si A y B son dos puntos del modelo del disco del Plano Proyectivo sabemos que su distancia proyectiva viene dada por

$$d(A,B)= \min [\delta (A_i,B_j)] \quad i, j \in \{1,2\}$$

en donde δ denota la distancia esférica y A_1 y A_2 , y B_1 y B_2 son los puntos de la esfera cuyas clases de equivalencia son A y B respectivamente. Como se ha hecho observar anteriormente, a la hora de construir herramientas nos basta con conocer la fórmula de la distancia restringida al caso de que uno de los puntos sea el centro del disco O=(0,0,0). En este caso tenemos:

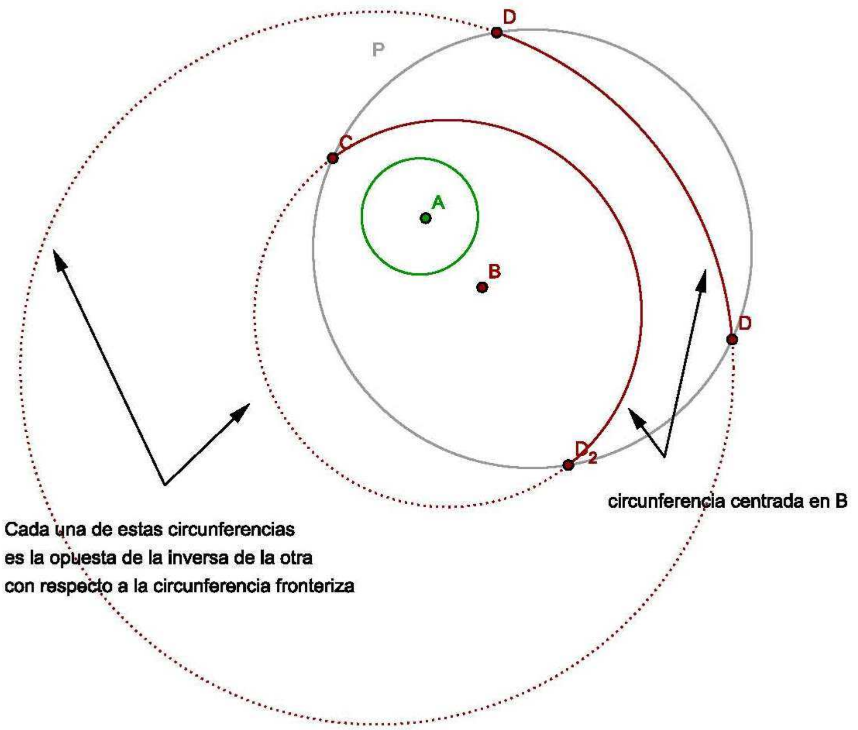
$$d(O,A)=2*\text{atan}(|z|)$$

en donde z es la coordenada de a visto como punto de la recta compleja.



- Una **circunferencia proyectiva**, esto es, el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia proyectiva a un punto dado llamado centro es una cantidad dada constante menor que $\pi/2$ llamada radio, viene representada en el modelo del disco del Plano Proyectivo por una circunferencia o por dos arcos de circunferencia con extremos en la circunferencia fronteriza tales que los puntos extremos de los dos arcos son antipodales unos de otros.

Esa afirmación resulta evidente para circunferencias proyectivas con centro en el centro del disco. Ahora bien, teniendo en cuenta que el grupo de isometrías del Plano Proyectivo actúa sobre éste transitivamente y que las reflexiones en rectas que generan dicho grupo son de hecho inversiones con respecto a circunferencias y que por tanto transforman circunferencias en circunferencias se sigue que la afirmación anterior es cierta si tenemos también en cuenta que la reflexión antipodal también transforma circunferencias en circunferencias.



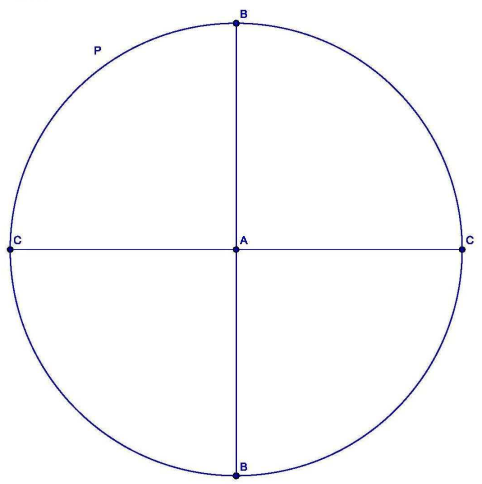
Circunferencias proyectivas centradas en A y en B

- Para hablar de polígonos en Geometría Proyectiva tenemos que ser un poco cuidadosos al dar la definición de qué entendemos por polígono proyectivo. Dado un número natural $n\geq 3$ diremos que una sucesión de n puntos del Plano Proyectivo A_1, A_2, ..., A_n determinan un polígono proyectivo si se verifican las siguientes condiciones:
  a) A_{i-1}, A_i y A_{i+1} no están alineados proyectivamente $\forall i$; $2\leq i\leq n-1$.
  b) Los segmentos proyectivos A_1A_2, A_2A_3,...,$A_{n-1}A_n$, A_nA_1 determinan una línea poligonal proyectiva cerrada que no se autointerseca.
  c) La línea poligonal proyectiva anteriormente definida divide al Plano Proyectivo en dos componentes conexas, una de las cuales, a la que llamaremos interior del n-gono proyectivo es homeomorfa a un disco. Nótese que la otra es homeomorfa a una banda de Möebius.

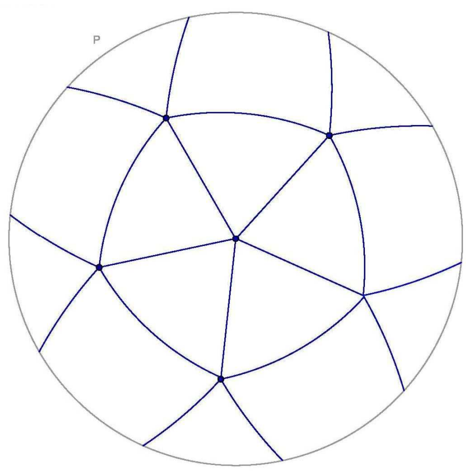
Esta definición de polígono proyectivo nos permite asegurar que toda recta proyectiva que corta a un polígono proyectivo lo hace un número par de veces.

- Un **triángulo proyectivo** viene determinado por tres puntos del Plano Proyectivo no contenidos simultáneamente en ninguna recta proyectiva A, B y C y los segmentos proyectivos determinados por dichos puntos tomados dos a dos, a=BC, b=CA y c=AB siempre que se verifiquen las tres condiciones anteriores. Una propiedad que verifica el Plano Proyectivo es que la suma de los ángulos de cualquier triángulo proyectivo es estrictamente mayor que π y, además, la diferencia entre dicha suma y π aumenta a medida que lo hace el tamaño del triángulo. Llamamos *exceso esférico* a dicha diferencia y nos proporciona la medida de superficie en el Plano Proyectivo. Tenemos así que el área de un triángulo proyectivo de ángulos α, β y γ es igual a $(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$.

Nótese que en la Geometría Proyectiva tampoco existe el concepto de semejanza de triángulos ya que si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes iguales entonces tienen la misma área. Nótese asimismo que con ayuda de regla y compás proyectivos podemos construir triángulos equiláteros con lados de cualquier longitud comprendida entre cero y π, cuyos ángulo irán aumentando a medida que lo haga la longitud de sus lados, variando entre $\pi/3$ y $\pi/2$, no alcanzándose el extremo inferior del intervalo. En particular para $n\in\{4,5\}$ existen triángulos proyectivos equiláteros cuyos ángulos miden exactamente $2\pi/n$. Estos triángulos proyectivos, por sucesivas reflexiones en los lados generan dos **teselaciones** del Plano Proyectivo mediante triángulos proyectivos equiláteros en las que en cada vértice inciden n triángulos, a las que llamaremos respectivamente tetraedro proyectivo y decaedro proyectivo.



Tetraedro proyectivo



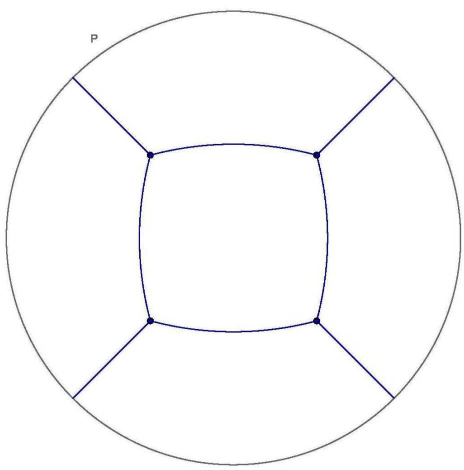
Decaedro proyectivo

Observemos que el tetraedro proyectivo tiene tres vértices, seis aristas y cuatro caras, mientras que el decaedro proyectivo tiene seis vértices, quince aristas y diez caras. Estas teselaciones son el cociente de las teselaciones inducidas en la esfera por el octaedro y el icosaedro regulares respectivamente.

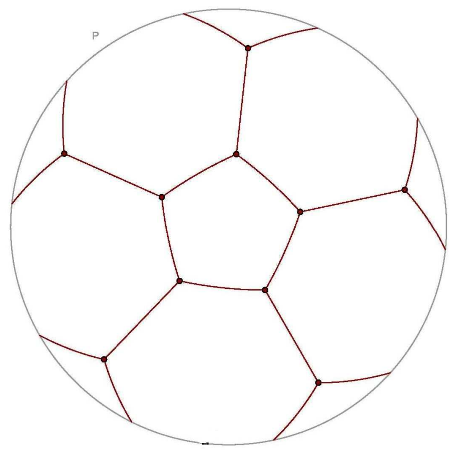
- De modo análogo, a lo que les sucede a los triángulos proyectivos, si n es un número natural mayor o igual que 4 todo **polígono proyectivo** de n lados tiene la propiedad de que la suma de sus ángulos es estrictamente mayor que π(n-2). Además, si llamamos α_1, α_2,...α_n a dichos ángulos el área del polígono proyectivo de n lados es igual a ($\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$)-$\pi$(n-2).

Así, nuevamente de modo análogo al caso de los triángulos proyectivos equiláteros, podemos afirmar que para cada n≥4 existen n-gonos regulares con lados de cualquier longitud comprendida entre cero y π, cuyos ángulo irán aumentando a medida que aumente la longitud de sus lados, variando entre π(n-2)/n y π, no alcanzándose ninguno de los extremos del intervalo.

Determinemos ahora cuáles son las teselaciones del Plano Proyectivo mediante n-gonos regulares. Sabemos que existen n-gonos regulares con ángulos de cualquier medida mayor que π(n-2)/n=2π(n-2)/2n y menor que π. Así, si llamamos F(n) a 2n/(n-2) podemos afirmar que para cada entero m mayor o igual que 3 y estrictamente menor que F(n) existen n-gonos proyectivos regulares cuyos ángulos miden 2π/m. Estos n-gonos proyectivos, por sucesivas reflexiones en sus lados generan teselaciones del Plano Proyectivo mediante n-gonos proyectivos regulares en las que en cada vértice inciden m n-gonos. Ahora bien, para todo n≥6 F(n)≤3, que es el menor número de incidencia posible en los vértices de una teselación regular, por lo tanto existen teselaciones por cuadrados proyectivos regulares con números de incidencia en cada vértice igual a 3 y teselaciones por pentágonos proyectivos regulares con números de incidencia en cada vértice igual a 3. A las primeras les llamaremos triedros proyectivos y a las segundas hexaedros proyectivos.



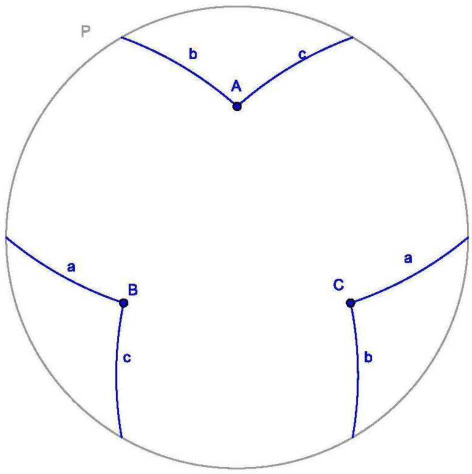
Triedro proyectivo



Hexaedro proyectivo

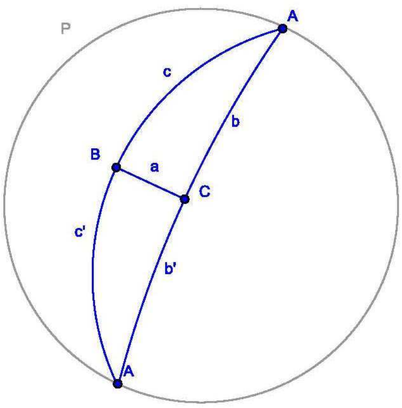
Observemos que el triedro proyectivo tiene cuatro vértices, seis aristas y tres caras, por lo que es la teselación dual del tetraedro proyectivo, mientras que el hexaedro proyectivo tiene diez vértices, quince aristas y seis caras, por lo que es la teselación dual del decaedro proyectivo. Estas teselaciones son el cociente de las teselaciones inducidas en la esfera por el hexaedro y el dodecaedro regulares respectivamente.

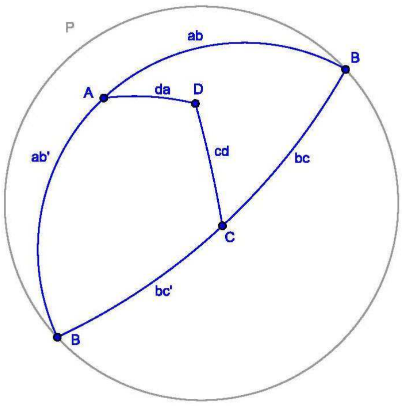
Hagamos notar también que no todo polígono ni toda teselación de la esfera dan lugar a polígonos y teselaciones del Plano Proyectivo. Así por ejemplo un triángulo equilátero esférico cuyos lados miden más que $\pi/2$ y cuyos ángulo miden, por tanto, también más que $\pi/2$ no da lugar a un triángulo proyectivo, ya que la línea poligonal proyectiva que determinan las proyecciones de sus vértices no divide al Plano Proyectivo.



De aquí deducimos que la teselación inducida en la esfera por el tetraedro regular no se proyecta en ninguna teselación del Plano Proyectivo. Tampoco los diedros que teselan la esfera inducen teselación alguna en el Plano Proyectivo ya que sus aristas miden $\pi > \pi/2$ y sus dos vértices dan lugar a un único punto del Plano Proyectivo.

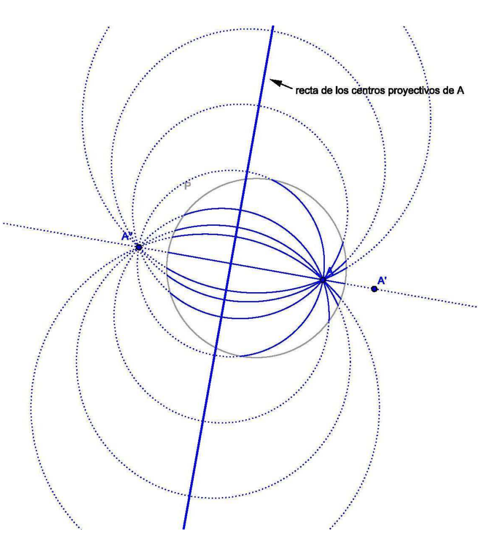
- Cerraremos el tema de los polígonos proyectivos comentando que aunque en la definición de segmento proyectivo no admitíamos los segmentos de longitud $\pi/2$ por no estar unívocamente definidos, sí que admitimos polígonos proyectivos con aristas de longitud $\pi/2$, siempre y cuando cumplan las tres condiciones exigidas para se polígonos proyectivos. En estas condiciones, una familia ordenada de puntos del Plano Proyectivo pueden determinas más de un polígono proyectivo, como sucedía en el caso del tetraedro proyectivo, cuyas cuatro caras son cuatro triángulos equiláteros distinto, todos ellos con los mismos vértices.

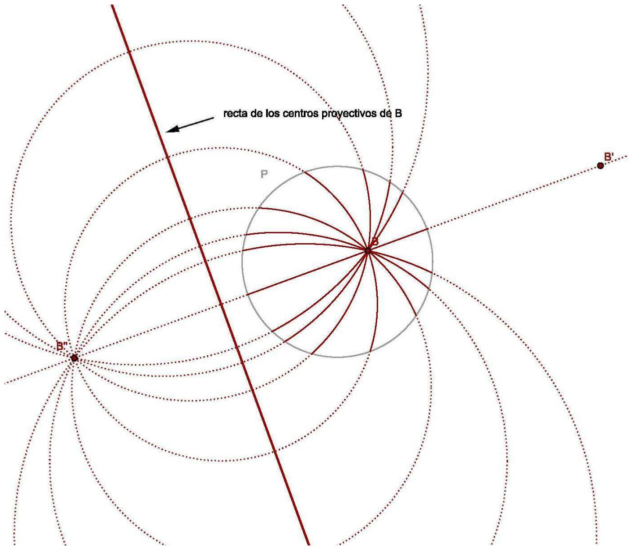




Así por ejemplo, los puntos A, B y C de la figura superior izquierda que verifican que d(A,B)=d(A,C)= $\pi/2$ determinan dos triángulos proyectivos de aristas a, b y c, y a, b' y c', respectivamente. De la misma manera, los puntos A, B, C y D de la figura de su derecha que verifican que d(A,B)=d(B,C)= $\pi/2$ determinan dos cuadriláteros proyectivos de aristas ab, bc, cd y da, y ab', bc', cd y da, respectivamente.

- Finalmente, para cerrar este apartado sobre el Plano Proyectivo y el disco definiremos un lugar geométrico que nos será de gran utilidad para la construcción de herramientas de Geometría Proyectiva en GeoGebra.





Si A es un punto del modelo del disco del Plano Proyectivo distinto del centro, A' es el inverso de A con respecto a la circunferencia fronteriza y A'' es el reflejado de A' en el centro del disco, el lugar geométrico de todos los puntos del plano que son centros de las circunferencias del plano cuya intersección con el modelo del disco del Plano Proyectivo da lugar a las rectas proyectivas que pasan por A es la mediatriz del segmento de extremos A y A''. Llamaremos a esta recta *recta de los centros proyectivos de A*. Obsérvese que dicha recta puede intersecar o no al disco.

6.- Sobre la creación de herramientas en GeoGebra

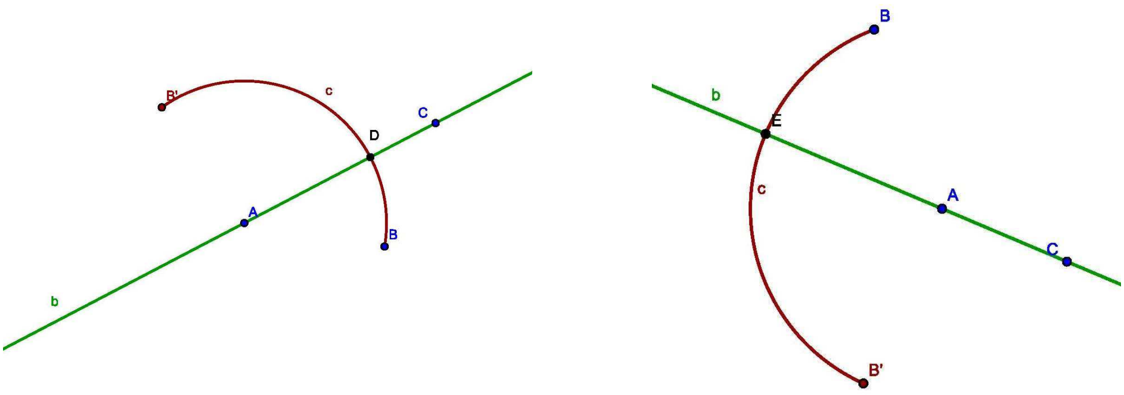
Leemos en el manual de GeoGebra: *GeoGebra permite crear herramientas basadas en una construcción preexistente. En primer lugar, es preciso elaborar la construcción que la herramienta debe poder trazar a posteriori. En el menú Herramientas basta un clic sobre Creación de Herramienta Nueva para abrir la correspondiente caja de diálogo. Ahora se precisa completar los datos en las tres pestañas: Objetos de salida, Objetos de Entrada y Nombre e Icono para crear efectivamente la herramienta.* De este modo tan sencillo podemos ir construyendo herramientas similares a las que ofrece GeoGebra de Geometría Euclídea, para el modelo del Disco de Poincaré de Geometría Hiperbólica y para el modelo del disco unidad del Plano Proyectivo. La estrategia consiste pues, en ser capaces de hacer, a partir de las herramientas originales de GeoGebra o a partir de éstas junto con otras herramientas previamente creadas, las construcciones que nos permitan reproducir las especificidades de cada una de las Geometrías antes mencionadas. Gran parte de estas construcciones se apoyarán en procedimientos simples de dibujo técnico. Oras, sin embargo, requerirán una mayor dosis de astucia.

Comentaremos en esta sección algunas dificultades que hemos encontrado a la hora de crear herramientas con GeoGebra a nivel de usuario. Estas dificultades surgen cuando se quiere usar GeoGebra como herramienta de geometría dinámica.

- Diremos, en primer lugar, que tanto para la construcción de herramientas hiperbólicas como proyectivas, el gestor de herramientas de GeoGebra nos exige incluir entre los datos de entrada la circunferencia fronteriza del disco. Esto hace que al utilizar las herramientas , tanto hiperbólicas como proyectivas, tengamos que incluir entre los datos de entrada (casi siempre lo haremos en último lugar) la circunferencia en cuestión.

- GeoGebra puede dibujar arcos de circunferencia lo cual es esencial para nuestro propósito, ya que tanto las rectas hiperbólicas del Disco de Poincaré como las rectas proyectivas del modelo del disco del Plano Proyectivo son arcos de circunferencia. Ahora bien, aunque aparentemente se trabaje con un arco, de hecho se tiene en cuenta toda la circunferencia de la cual forma parte. Esto provoca que un punto unívocamente definido como intersección del mencionado arco con otro objeto cambie de nombre al mover los objetos involucrados en la construcción, lo que constituye un problema que nos ha obligado a refinar algunas construcciones que en principio eran correctas y estaban bien definidas.

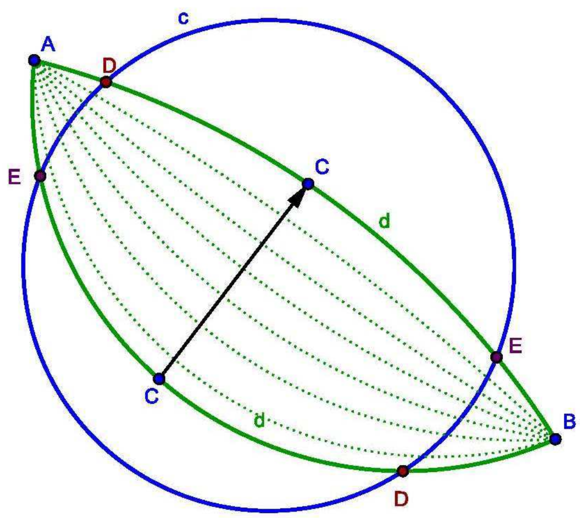
Ilustremos esta situación con un ejemplo:



Tomemos tres puntos A, B y C. Construimos el arco c con centro en A, que parte de B y tiene una amplitud de 135º. Construimos la recta b que pasa por A y por C. Por su propia definición, sean cuales sean los puntos A, B y C, el arco c y la recta b o no se cortan o tienen un único punto de intersección. Ahora bien, según cómo movamos los puntos A, B y C por el plano el punto de intersección de b y c en unos casos es llamado D y en otros es llamado E.

- Algo parecido sucede cuando al variar un arco por mover alguno de los objetos que lo determinan, cambia de signo su curvatura. En este caso, si el arco tenía dos puntos de intersección con otro objeto como pueden ser otro arco, una circunferencia, una recta, al cambiar la curvatura del arco de signo, los puntos de intersección antes mencionados se intercambian.

Así por ejemplo, si c es una circunferencia, A Y B dos puntos del exterior de c y C un punto del interior, construimos el arco d que pasa por A, C y B y llamamos D y E a los puntos de intersección de c con d.



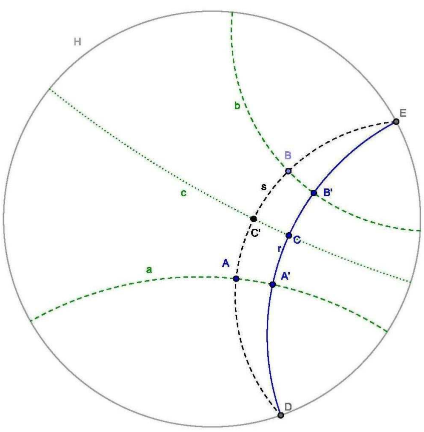
Entonces, si desplazamos el punto C de modo que cambie el signo de la curvatura de d, los puntos D y E intercambian sus posiciones.

7.- Construyendo herramientas en el Disco de Poincaré

- Como comentamos anteriormente, el Disco de Poincaré tiene un buen comportamiento fruto del hecho de que las dos hojas del hiperboloide del que es proyección estereográfica están desconectadas entre sí y como consecuencia las isometrías hiperbólicas preservan ambas hojas. Esto se traduce en que las reflexiones en rectas hiperbólicas consideradas como arcos del plano soporte del Disco de Poincaré llevan puntos del interior del Disco en puntos del interior del Disco, puntos de la frontera del Disco en puntos de la frontera del Disco y puntos del exterior del Disco en puntos del exterior del Disco. Este hecho facilita mucho la construcción de herramientas hiperbólicas.

- Otra buena propiedad del Disco de Poincaré es que hace accesibles los puntos del infinito por ser un modelo acotado. Este hecho nos permitirá construir sin demasiada dificultad una serie de herramientas que involucran, directa o indirectamente, puntos del infinito, como son las rectas y semirrectas hiperbólicas y las isometrías hiperbólicas, especialmente las rotaciones límite. Recordemos aquí que una rotación límite viene dada por la composición de dos reflexiones en rectas hiperbólicas paralelas, estos es, en dos rectas hiperbólicas que convergen en un punto del infinito. Aunque se asemeja a una rotación, al ser el centro de rotación un punto del infinito, no podemos hablar de ángulo de rotación ya que todas las rectas hiperbólicas son tangentes entre sí en dicho punto impropio. Así, para determinar de qué rotación límite estamos hablando debemos conocer, además del centro de rotación el transformado de otro punto por la acción de la rotación límite. A la hora de construir en GeoGebra una herramienta que nos diera la acción de una rotación límite hemos pedido, como datos de entrada el centro y la acción del la rotación límite sobre un punto del infinito. A partir de estos datos somos capaces de localizar los dos ejes de reflexión que dan lugar a la isometría en cuestión. Hagamos notar aquí también que los horociclos, curvas invariantes globalmente por la acción de rotaciones límite, son cónicas (curvas algebraicas de grado dos) tangentes al infinito. Por analogía con el plano euclídeo podríamos decir que los horociclos son *parábolas hiperbólicas*.

- En cuanto a las traslaciones, que como hemos dicho anteriormente vienen dadas por la composición de dos reflexiones en rectas ultraparalelas, para saber como actúan sobre un punto debemos tener en cuenta que en Geometría Hiperbólica no podemos hablar de paralelismo de vectores en el sentido en que lo hacemos en Geometría Euclídea debido a la negación del quinto Postulado de Euclides. A la hora de construir en GeoGebra una herramienta que nos diera la acción de una traslación hiperbólica hemos pedido, como datos de entrada los puntos origen y extremo del *vector de traslación*. La acción de la isometría determinada por un vector de traslación transforma la recta hiperbólica perpendicular al vector de traslación en su origen en la recta hiperbólica perpendicular al vector de traslación en su extremo, dejando invariante a la recta que contiene al mencionado vector. Notemos aquí que dichas rectas perpendiculares son ultraparalelas entre sí y que la recta hiperbólica que contiene al vector de traslación es la única perpendicular común a ambas.



- Las traslaciones hiperbólicas, como hicimos observar anteriormente, dejan globalmente invariantes, además de la recta que contiene al vector de traslación, a su offset, esto es a todas las curvas *paralelas* a la misma que son, como puede deducirse de la imagen superior, los arcos de circunferencia contenidos en el Disco de Poincaré cuyos dos puntos de intersección con la circunferencia del infinito coinciden con los de la recta hiperbólica. Estas curvas son cónicas (curvas algebraicas de grado dos) que convergen asintóticamente con dicha recta por ambos extremos. Nuevamente, por analogía con el plano euclídeo podríamos decir que los offset de rectas hiperbólicas son *hipérbolas hiperbólicas*.

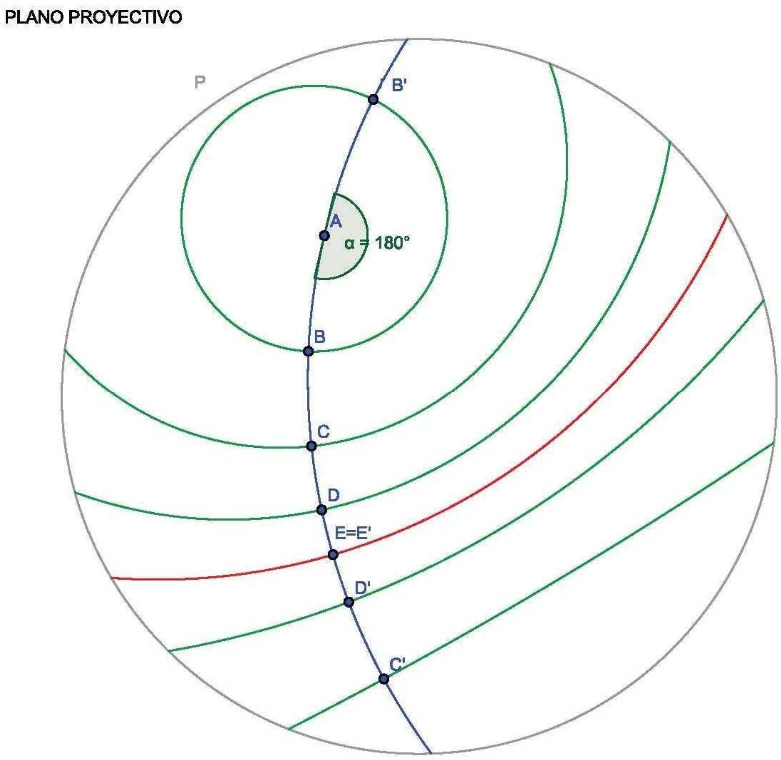
8.- Construyendo herramientas en el Plano Proyectivo

- El modelo del disco del Plano Proyectivo, a diferencia del disco de Poincaré tiene malas propiedades para la construcción de herramientas dinámicas con GeoGebra. Este mal comportamiento se debe, en primer lugar a la no orientabilidad del Plano Proyectivo, en segundo lugar a que, a diferencia de lo que ocurría en el Disco de Poincaré, las reflexiones en rectas proyectivas consideradas como arcos del plano soporte del modelo del disco del Plano Proyectivo, no llevan necesariamente puntos del interior del disco en puntos del interior del disco, puntos de la frontera del disco en puntos de la frontera del disco ni puntos del exterior del disco en puntos del exterior del disco, y, finalmente a que algunos objetos elementales como pueden ser segmentos proyectivos o circunferencias proyectivas pueden presentar en el modelo del disco una o dos componentes conexas. Este último hecho complica mucho la construcción de las herramientas correspondientes en GeoGebra y hace inestable el modelo de GeoGebra si se quieren construir nuevas herramientas que las utilicen.

- Notemos también que a diferencia del Plano Hiperbólico, el Plano Proyectivo es una superficie completa, esto es, cerrada y acotada, y por tanto no tiene puntos del infinito. Sin embargo, en el modelo del disco hay puntos que aparentemente están en la frontera del Plano lo cual puede llevar a equívoco. Este hecho hace que algunas construcciones dinámicas en GeoGebra resulten bastante sorprendentes. También mencionaremos aquí que para cada recta proyectiva en el modelo del disco encontramos otra recta proyectiva distinguida, a saber, la perpendicular a la primera por su punto del borde del disco.

- En el modelo del disco del Plano Proyectivo que construimos con GeoGebra hay una serie de herramientas que no elaboramos, bien porque no tienen sentido, como por ejemplo semirrectas proyectivas, bien porque son muy obvias o bien porque su generación requeriría de construcciones previas que involucran duplicidades, como pudieran ser segmentos proyectivos o circunferencias proyectivas. Así por ejemplo no incluimos herramientas relacionadas con triángulos por dos razones, en primer lugar porque con la definición de polígono proyectivo que hemos dado tres puntos del Plano Proyectivo no siempre determinan un triángulo (y a veces determinan más de uno, en concreto dos o cuatro) y en segundo lugar porque la construcción de triángulos involucraría a la herramienta segmento que implica una duplicidad y corre el riesgo de desconfigurarse al hacer la construcción dinámica.

- Una rotación proyectiva de 180º, que también podemos ver como una reflexión con respecto a la recta polar del centro de rotación, deja fija punto a punto a dicha recta, mientras que mueve cada punto a su diametralmente opuesto dentro de la circunferencia proyectiva centrada en el centro de rotación. Esta observación nos permite afirmar que las circunferencias proyectivas de radio $\pi/2$ (el máximo posible) son las rectas proyectivas recorridas dos veces.



Notemos también que una circunferencia de radio $\pi/2$-t en torno a un punto A constituye el borde de un entorno tubular de radio t en torno a la recta polar de A, y que dicho entorno tubular es homeomorfo a una banda de Möebius.

- Observemos finalmente que en el modelo del disco del Plano Proyectivo, contrariamente a lo que ocurre en el Disco de Poincaré, las distancias se dilatan conforme nos acercamos al borde del modelo.

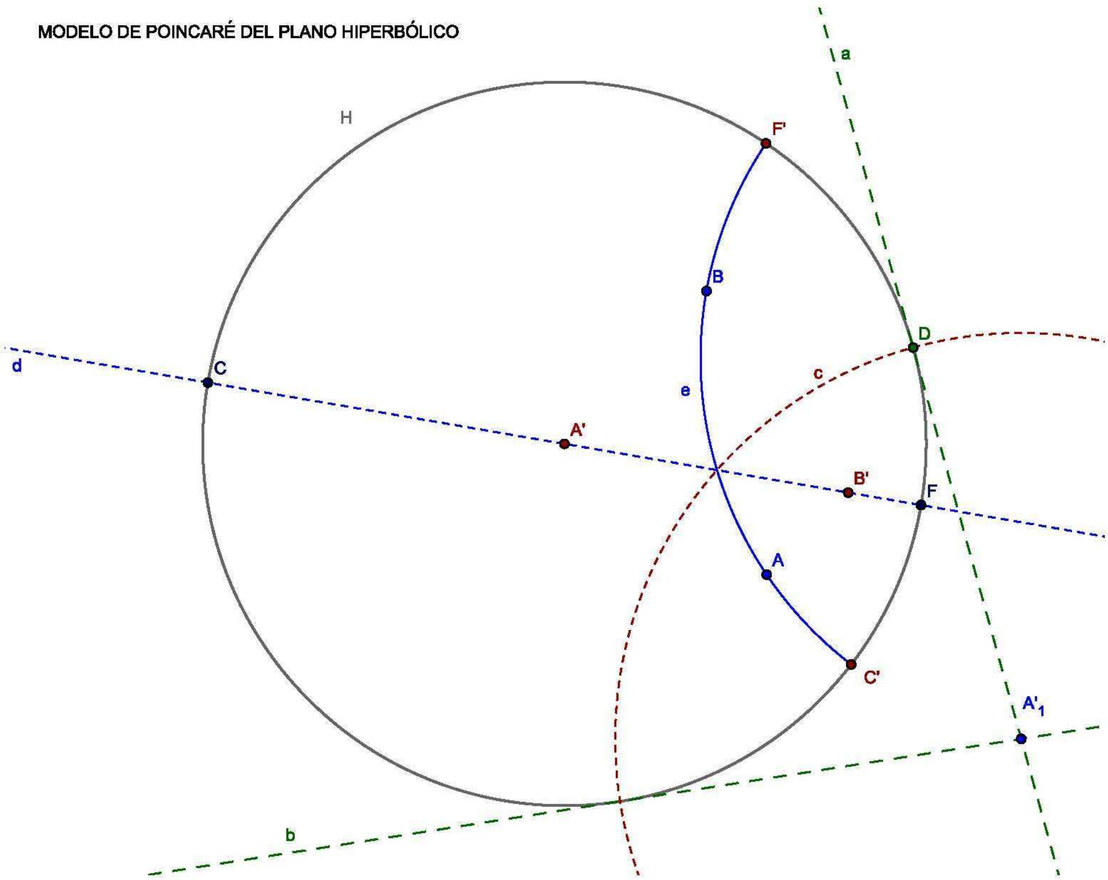
Parte segunda

Elaboración de herramientas hiperbólicas

Elaboración de herramientas hiperbólicas

Veremos a continuación el proceso de elaboración de cada una de las herramientas del Modelo del disco de Poincaré del Plano Hiperbólico H en el orden en el que aparecen al desplegar el paquete de herramientas, que coincide con el orden de construcción de las mismas.

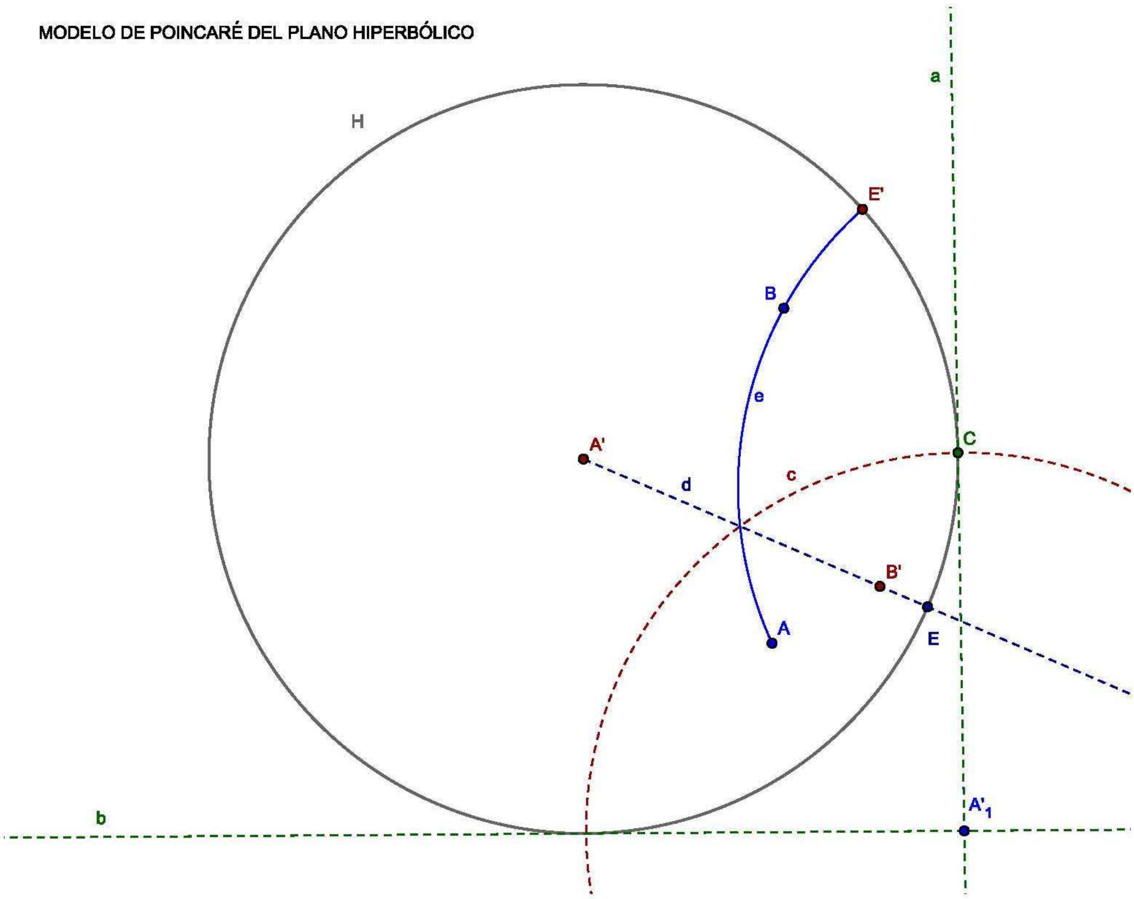
I.- **Recta**: recta hiperbólica que pasa por dos puntos dados.
Datos: los puntos A y B y la circunferencia H.



1. Dados los puntos A y B del interior de H, podemos asumir que A≠(0,0), construimos el punto A'_1 mediante la reflexión en H de A.
2. Desde A'_1 trazamos las rectas tangentes a H, a y b.
3. El punto D es el punto de intersección de a con H.
4. Se construye la circunferencia c con centro en A'_1 y que pasa por D.
5. Los puntos A' y B' son los reflejados de A y B en la circunferencia c.
6. Construimos la recta d que pasa por A' y B'.
7. C y F son los puntos de intersección de d con H.
8. C' y F' son los puntos reflejados de C y F en c.
9. Finalmente, el arco e que pasa por los puntos C', A y F' es la recta hiperbólica buscada.

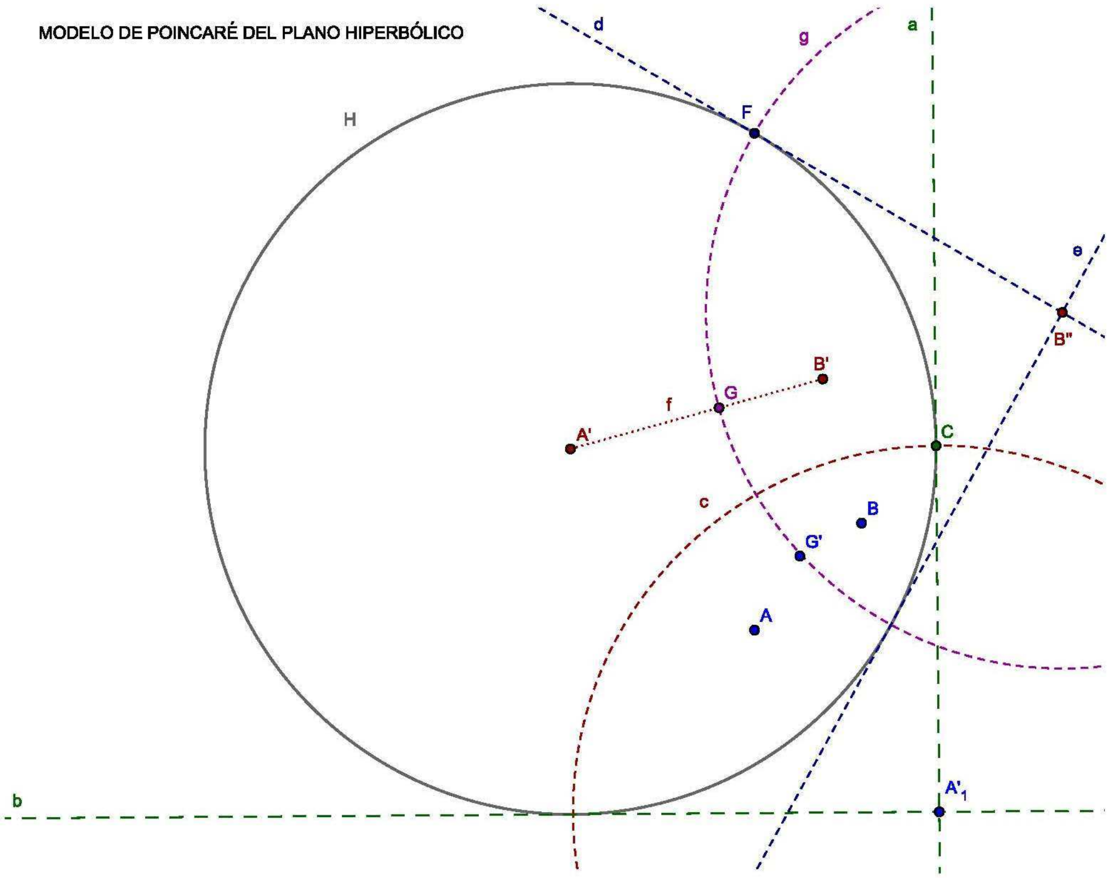
II.- **Semirrecta por dos puntos**: semirrecta hiperbólica que pasa por dos puntos dados.

Datos: los puntos A y B y la circunferencia H.



1. Dados los puntos A y B del interior de H, podemos asumir que A≠(0,0), construimos el punto A'_1 mediante la reflexión en H de A. Si fuera A=(0.0) la semirrecta hiperbólica sería directamente la semirrecta euclídea por A y B.
2. Desde A'_1 trazamos las rectas tangentes a H, a y b.
3. El punto C es el punto de intersección de a con H.
4. Se construye la circunferencia c con centro en A'_1 y que pasa por C.
5. Los puntos A' y B' son los reflejados de A y B en la circunferencia c.
6. Construimos la semirrecta d con origen en A' y que pasa por B'.
7. E es el punto de intersección de d con H.
8. El punto E' es el reflejado de E en c.
9. Finalmente el arco e que pasa por los puntos A, B y E' es la semirrecta hiperbólica buscada.

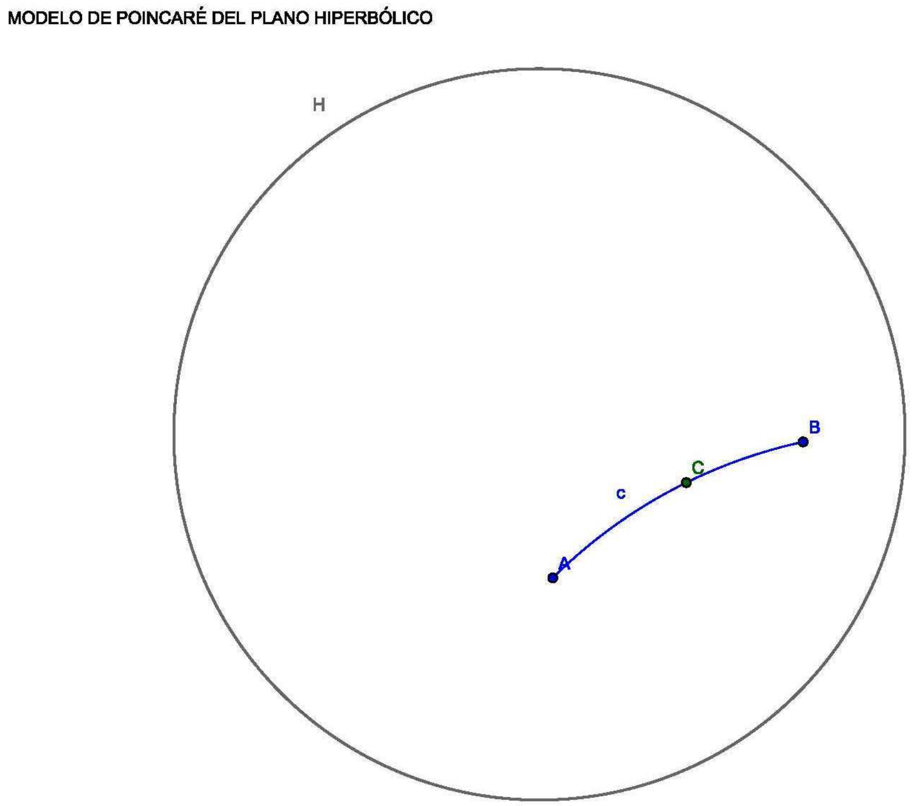
III.- **Punto medio**: punto medio entre dos puntos con la métrica hiperbólica.
Datos: los puntos A y B y la circunferencia H.



1. Dados los puntos A y B del interior de H, podemos asumir que A≠(0,0), construimos el punto A'_1 mediante la reflexión en H de A.
2. Desde A'_1 trazamos las rectas tangentes a H, a y b.
3. El punto C es el punto de intersección de a con H.
4. Se construye la circunferencia c con centro en A'_1 y que pasa por C.
5. Los puntos A' y B' son los reflejados de A y B en la circunferencia c.
6. Construimos el punto B'' mediante la reflexión en H de B'.
7. Desde B'' trazamos las rectas tangentes a H, d y e.
8. El punto F es el punto de intersección de d con H.
9. Se construye la circunferencia g con centro en B'' y que pasa por F.
10. Se construye el segmento f que une A' y B'.
11. El punto G es el punto de intersección de f y g.
12. El punto G', reflejado de G en c, es el punto buscado.

IV.- **Segmento entre dos puntos**: fragmento de recta hiperbólica comprendido entre dos puntos dados.

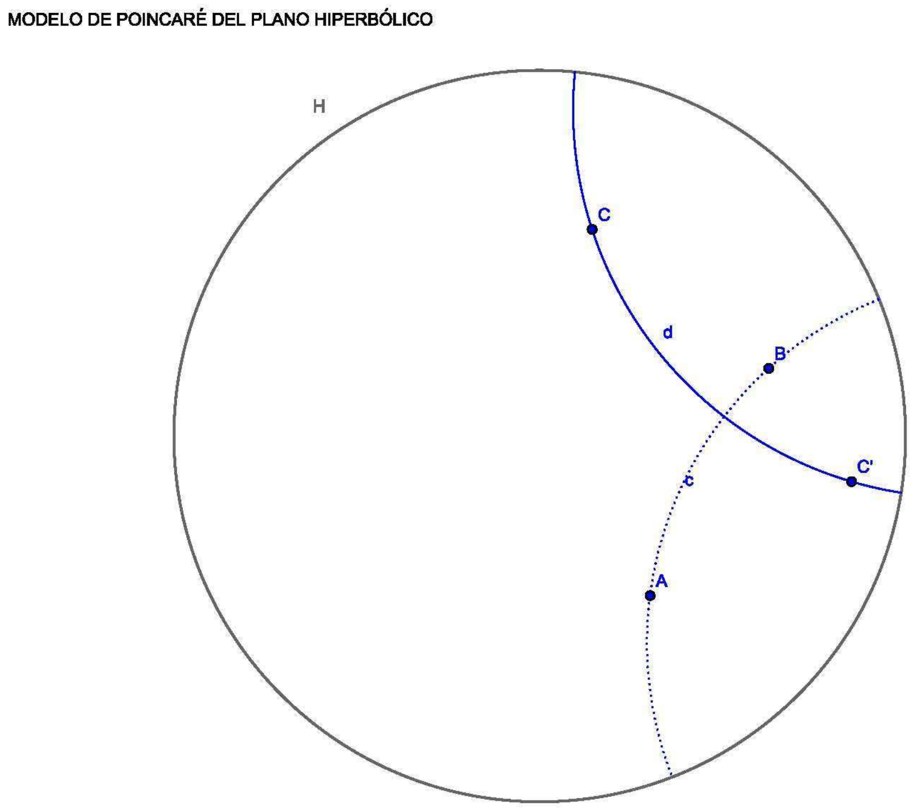
Datos: los puntos A y B y la circunferencia H.



1. Con ayuda de la herramienta anterior, se construye C, el punto medio hiperbólico entre A y B.
2. El arco c que pasa por los puntos A, C y B es el segmento hiperbólico buscado.

V.- **Recta perpendicular**: recta hiperbólica perpendicular a una recta hiperbólica dada desde un punto exterior a la misma.

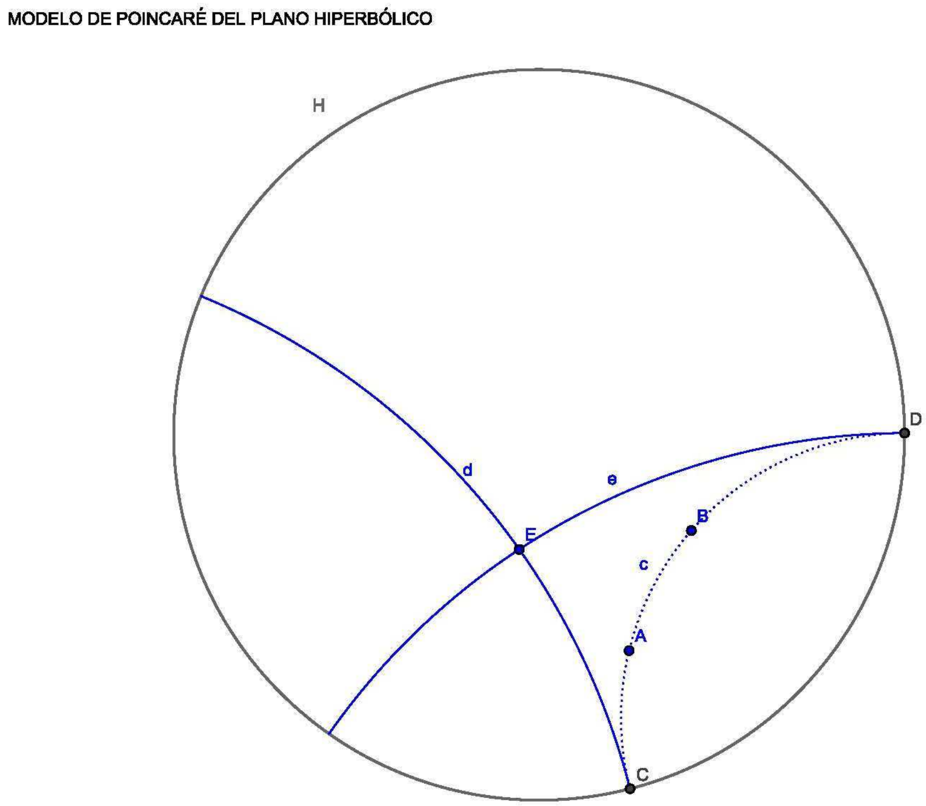
Datos: dos puntos de la recta, A y B, un punto exterior, C, y la circunferencia H.



1. Se construye el punto C', reflejado de C en la circunferencia que define la recta hiperbólica c=AB.
2. La recta hiperbólica d que pasa por C y C' es la perpendicular buscada.

VI.- **Rectas paralelas**: construye las dos rectas hiperbólicas paralelas a una recta dada que pasan por un punto dado exterior a la misma.

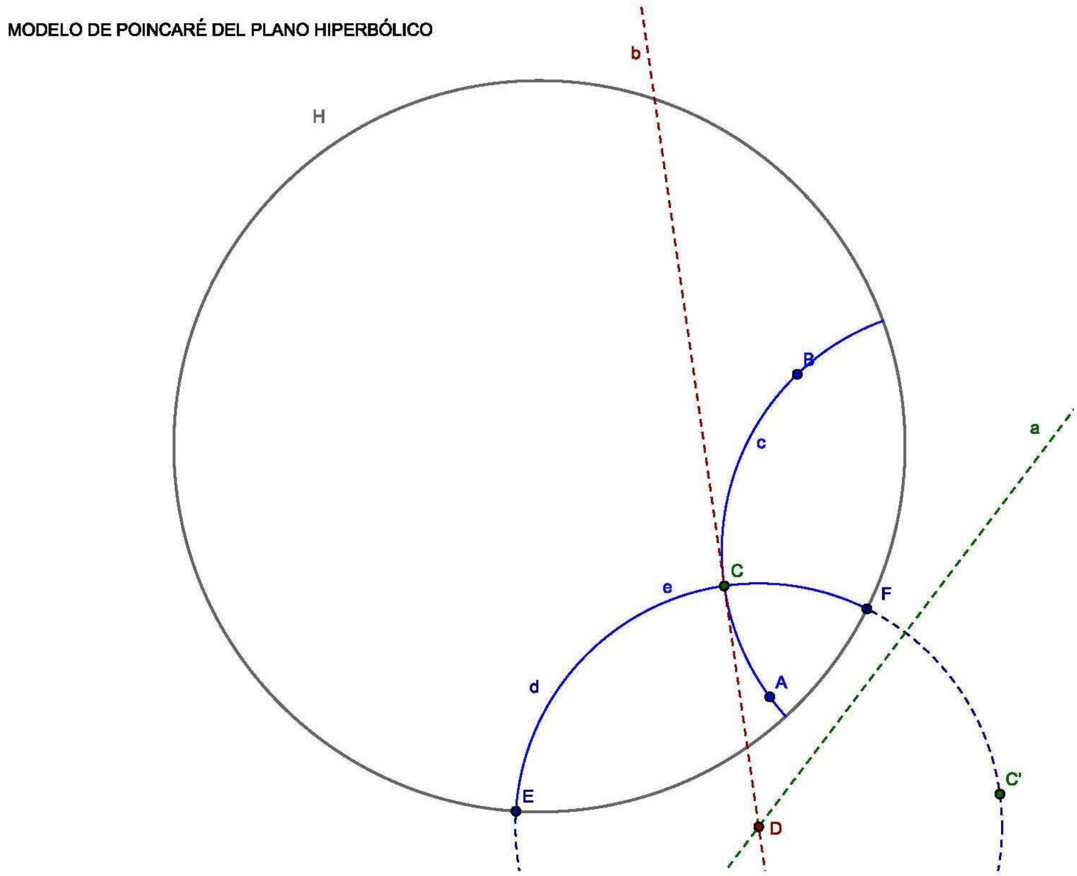
Datos: dos puntos de la recta, A y B, un punto exterior, E, y la circunferencia H.



1. Los puntos C y D son los puntos de intersección del arco que define la recta hiperbólica c=AB con la circunferencia H.
2. Las rectas hiperbólicas d=EC y e=ED son las paralelas buscadas.

VII.- **Mediatriz**: recta hiperbólica perpendicular al segmento hiperbólico definido por dos puntos dados en su punto medio.

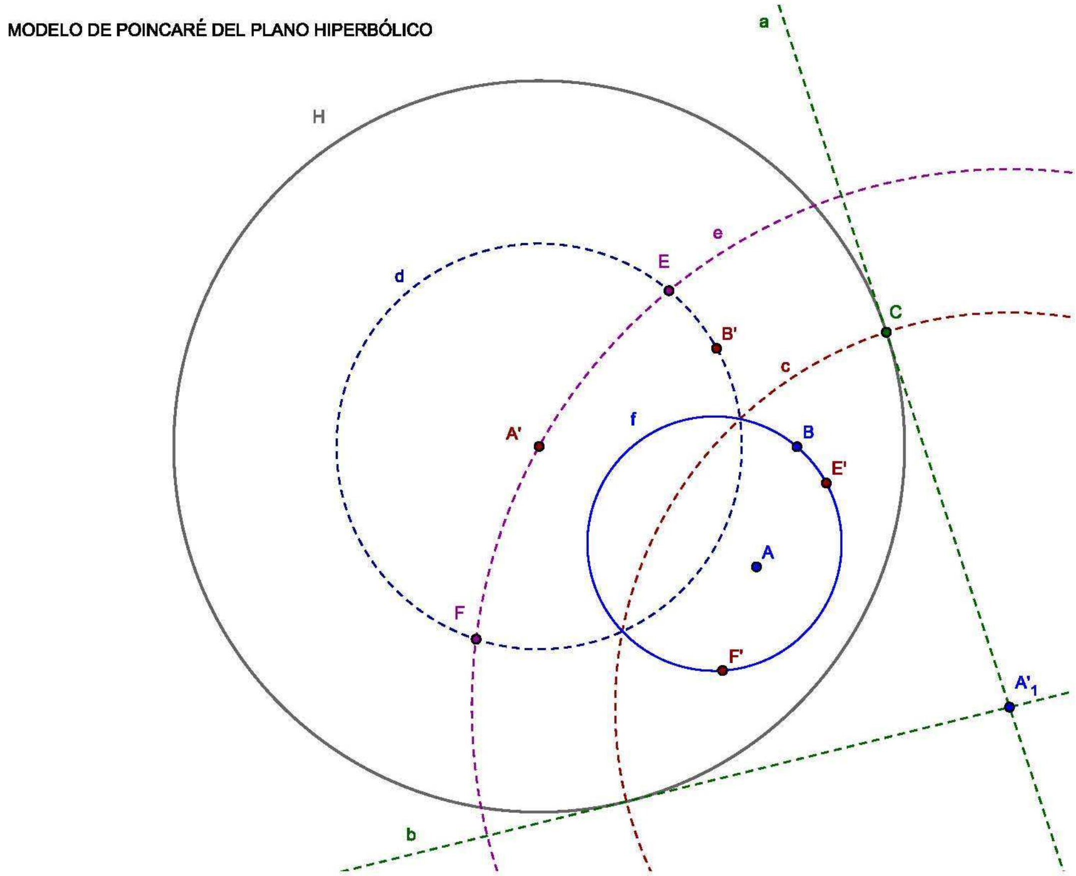
Datos: los puntos A y B y la circunferencia H.



1. El punto C es el punto medio hiperbólico entre los puntos A y B.
2. Se construye la recta b, polar de C con respecto a la circunferencia definida por la recta hiperbólica c=AB.
3. El punto C' es el reflejado de C respecto de la circunferencia H.
4. Se traza la recta a, mediatriz entre los puntos C y C'.
5. Es punto D es el punto de intersección de las rectas a y b.
6. Se traza la circunferencia d, con centro en D y que pasa por C.
7. E y F son los puntos de intersección de las circunferencias d y H.
8. El arco de circunferencia e que pasa por los puntos E, C y F es la mediatriz hiperbólica buscada.

VIII.- **Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos**: lugar geométrico de los puntos que equidistan hiperbólicamente, junto con el punto dado, de otro punto dado llamado centro.

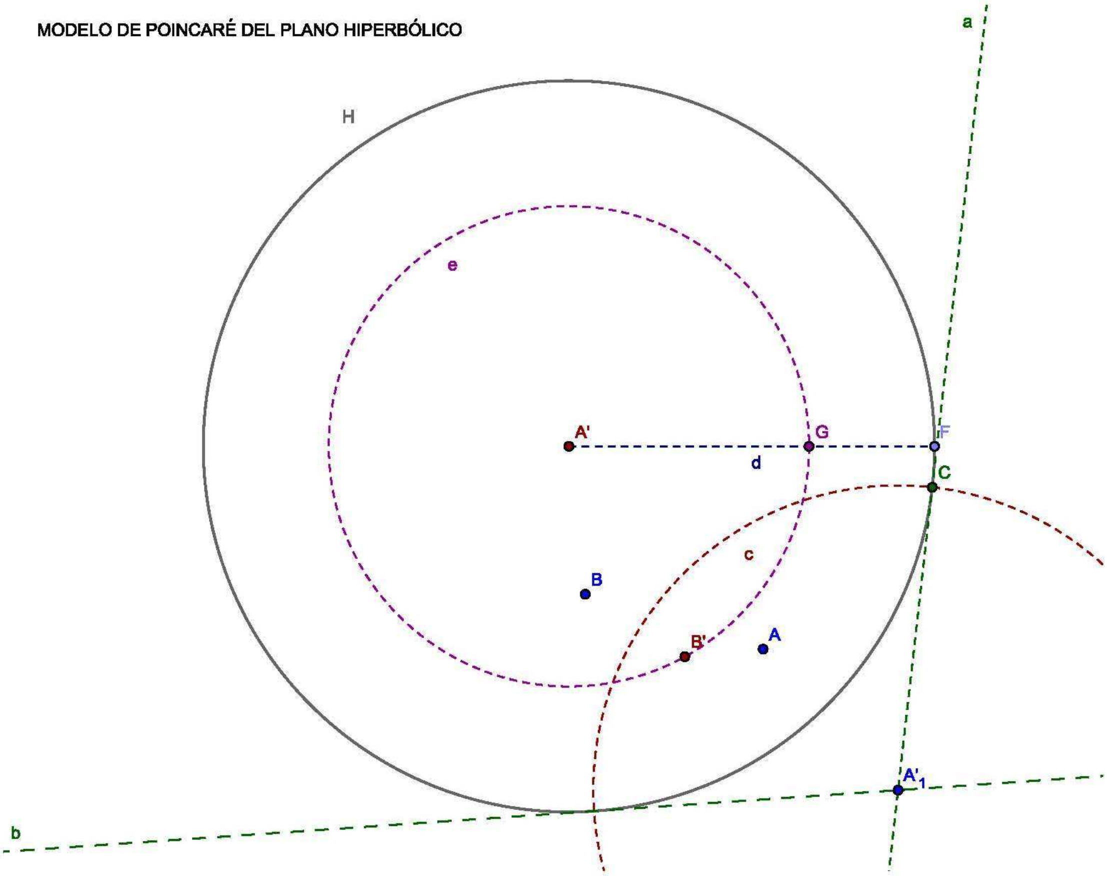
Datos: el centro de la circunferencia A, uno de sus puntos B, y la circunferencia H.



1. Dados los puntos A y B del interior de H, podemos asumir que A≠(0,0), construimos el punto A'_1 mediante la reflexión en H de A. Si fuera A=(0.0) la circunferencia hiperbólica sería directamente la circunferencia euclídea con centro en A y que pasa por B.
2. Desde A'_1 trazamos las rectas tangentes a H, a y b.
3. El punto C es el punto de intersección de a con H.
4. Se construye la circunferencia c con centro en A'_1 y que pasa por C.
5. Los puntos A' y B' son los reflejados de A y B en la circunferencia c.
6. Se construye d, circunferencia con centro en A' que pasa por B'.
7. Se construye e, circunferencia con centro en A'_1 que pasa por A'.
8. E y F son los puntos de intersección de las circunferencias d y e.
9. Se construyen E' y F' reflejando E y F en la circunferencia c.
10. La circunferencia f que pasa por los puntos B, E' y F', es la circunferencia hiperbólica buscada.

IX.- **Distancia h**: distancia hiperbólica entre dos puntos.

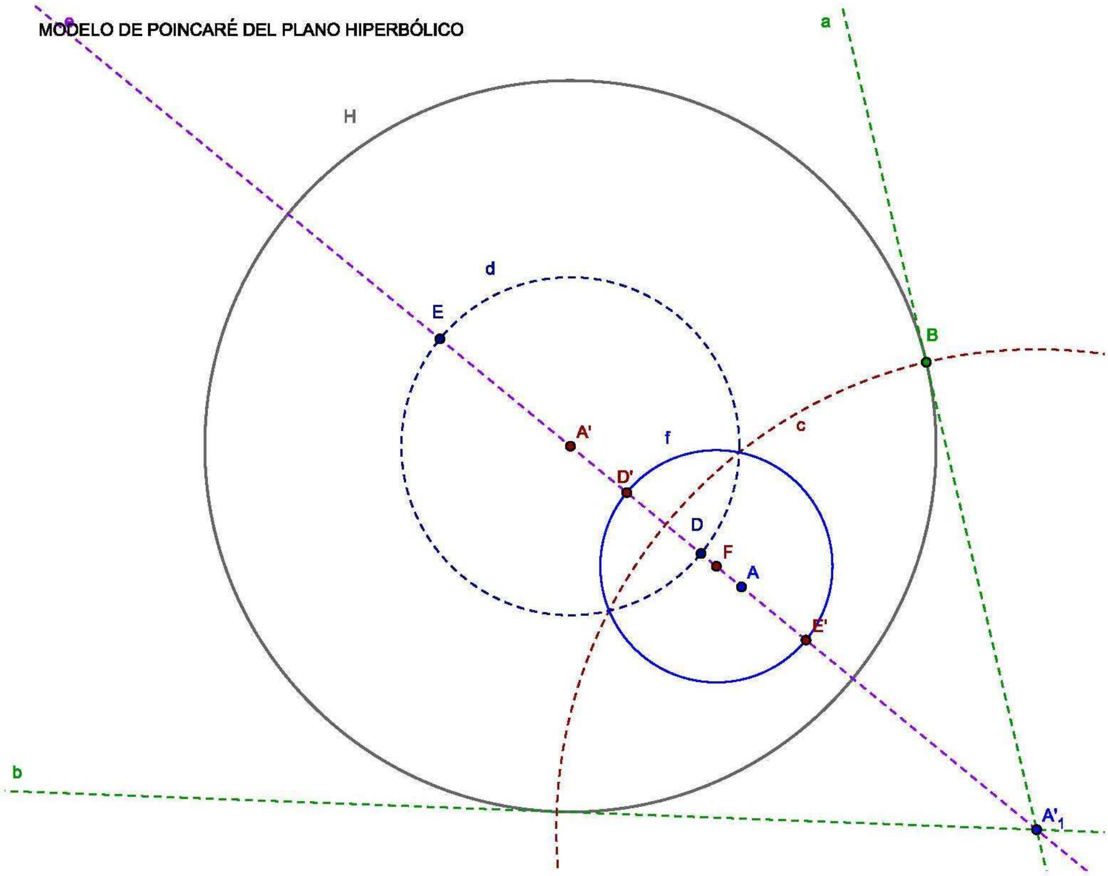
Datos: los puntos A y B y la circunferencia H.



1. Dados los puntos A y B del interior de H, podemos asumir que A≠(0,0), construimos el punto A'_1 mediante la reflexión en H de A.
2. Desde A'_1 trazamos las rectas tangentes a H, a y b.
3. El punto C es el punto de intersección de a con H.
4. Se construye la circunferencia c con centro en A'_1 y que pasa por C.
5. Los puntos A' y B' son los reflejados de A y B en la circunferencia c.
6. Construimos el segmento d con origen en A' y longitud 1.
7. Construimos la circunferencia e con centro en A' que pasa por B'.
8. El segmento d y la circunferencia e se cortan en el punto G.
9. La distancia entre los puntos A' y G es x(G), por tanto, tenemos que la distancia hiperbólica entre A y B, que es la misma que la distancia hiperbólica entre A' y B' y por tanto la misma que la distancia hiperbólica entre A' y G viene dada por la fórmula: ***atanh(x(G))*.**

X.- Circunferencia dados su centro y radio: lugar geométrico de los puntos que están a una distancia hiperbólica dada de un punto dado llamado centro.

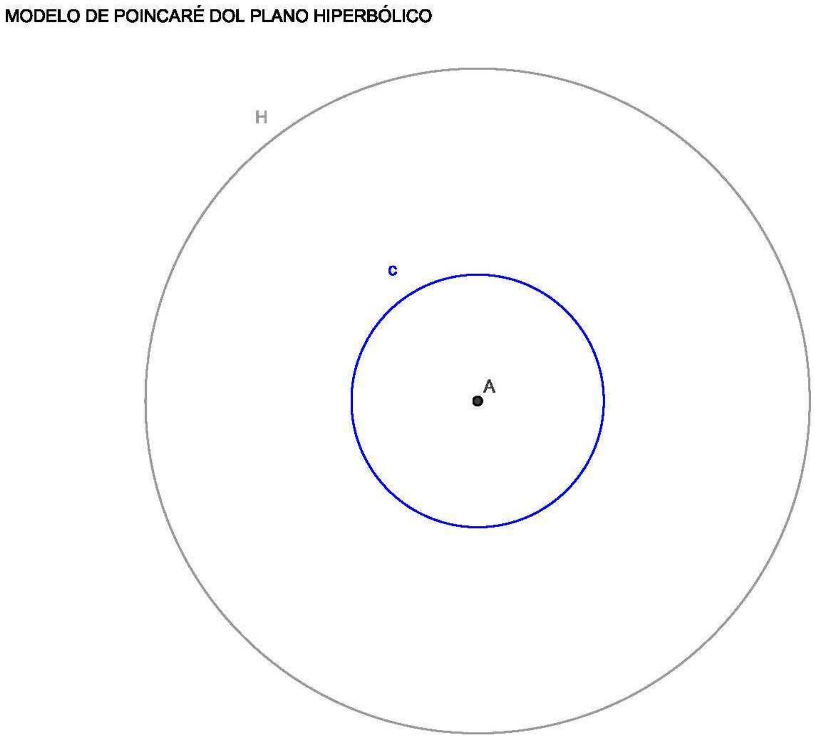
Datos: el centro de la circunferencia A, la distancia hiperbólica ***n***, y la circunferencia H.



1. Dado el punto A del interior de H, podemos asumir que A≠(0,0), construimos el punto A'_1 mediante la reflexión en H de A.
2. Desde A'_1 trazamos las rectas tangentes a H, a y b.
3. El punto B es el punto de intersección de a con H.
4. Se construye la circunferencia c con centro en A'_1 y que pasa por B.
5. El punto A' es el reflejado de A en la circunferencia c.
6. Se construye la circunferencia d con centro en A' y radio ***tanh(n)***.
7. Se traza la recta e que pasa por los puntos A' y A'_1.
8. Los puntos D y E son los puntos de intersección de la circunferencia d con la recta e.
9. Los puntos D' y E' son los reflejados de D y E en la circunferencia c.
10. El punto F es el punto medio (euclídeo) entre los puntos D' y E'.
11. La circunferencia (euclídea) f con centro en F y que pasa por D' es la circunferencia hiperbólica buscada.

XI.- **Circunferencia centrada en el origen dado su radio**: lugar geométrico de los puntos que están a una distancia hiperbólica dada del origen de coordenadas

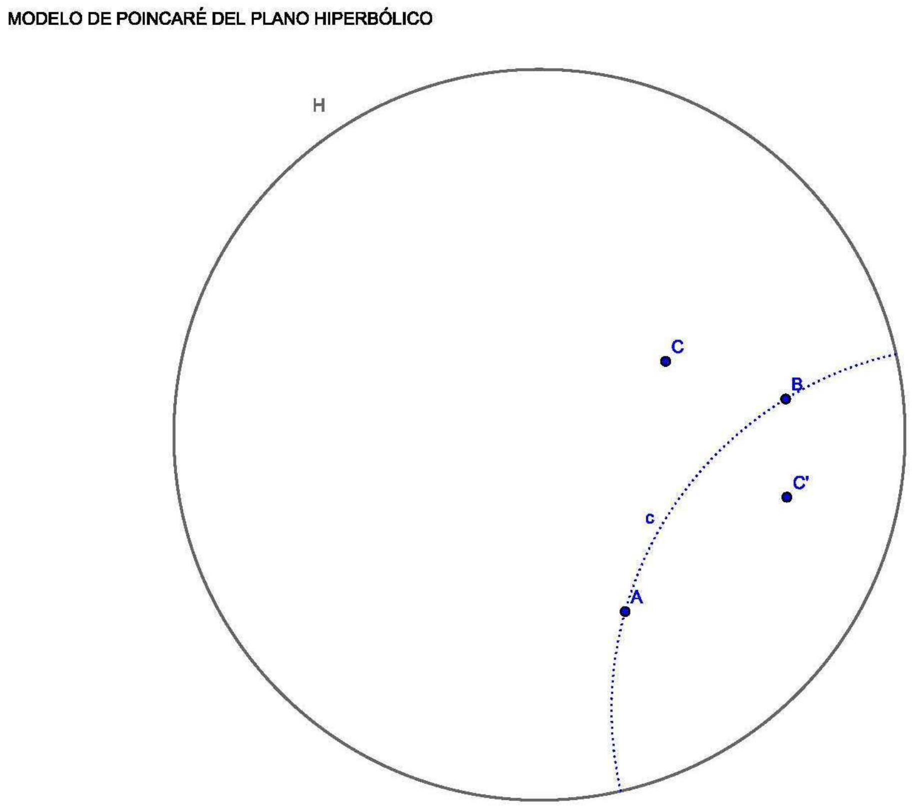
Datos: la circunferencia H y la distancia hiperbólica ***n***.



1. Se localiza el origen de coordenadas A=(0,0) aplicando la herramienta “punto medio o centro” a la circunferencia H.
2. La circunferencia c con centro en A y radio ***tanh(n)*** es la circunferencia hiperbólica buscada.

XII.- **Reflexión en recta hiperbólica**: halla el reflejado de un punto dado en una recta hiperbólica.

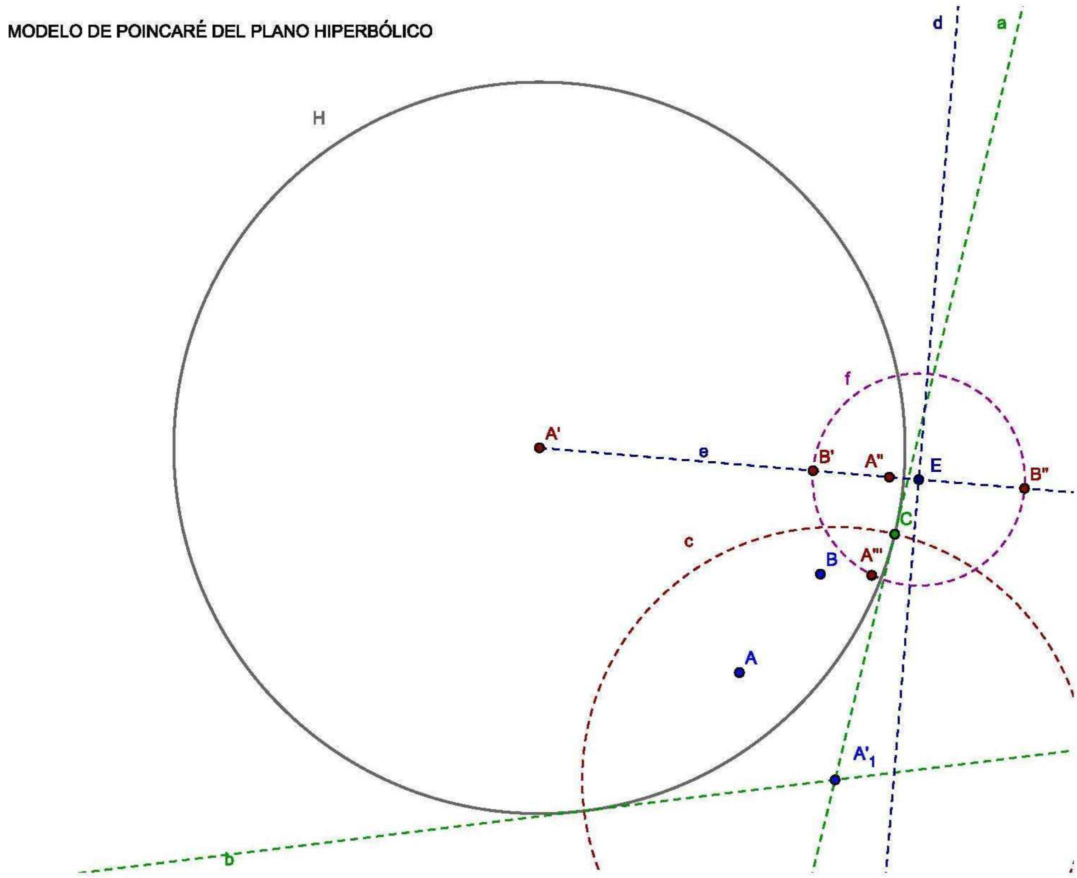
Datos: dos puntos A y B de la recta hiperbólica c, el punto a reflejar C y la circunferencia H.



1. El punto C', relejado de C respecto de la circunferencia euclídea c es el punto buscado.

XIII.- **Reflexión en un punto**: determina el reflejado de un punto con respecto a otro punto dado.

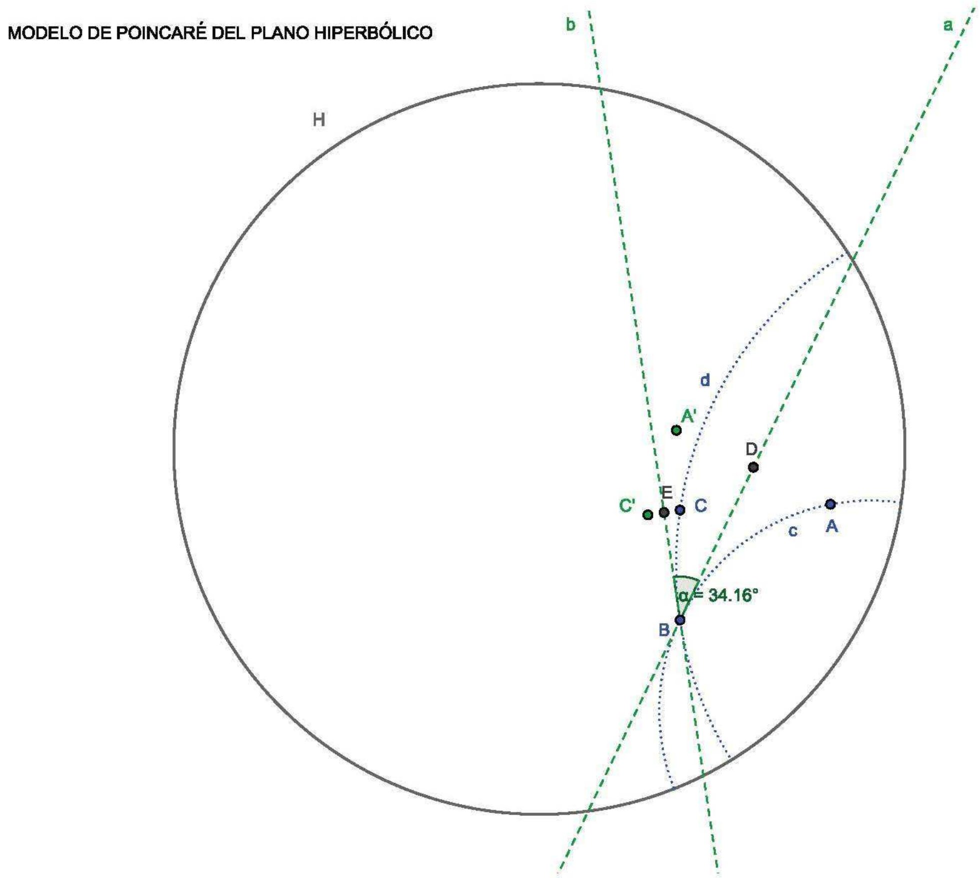
Datos: el punto a reflejar A, el centro de reflexión B y la circunferencia H.



1. Dados los puntos A y B del interior de H, podemos asumir que A≠(0,0), construimos el punto A'_1 mediante la reflexión en H de A.
2. Desde A'_1 trazamos las rectas tangentes a H, a y b.
3. El punto C es el punto de intersección de a con H.
4. Se construye la circunferencia c con centro en A'_1 y que pasa por C.
5. Los puntos A' y B' son los reflejados de A y B en la circunferencia c.
6. Se traza la semirrecta e con origen en A' que pasa por B'.
7. El punto B'' es el reflejado de B' respecto de H.
8. La recta d es la mediatriz de los puntos B' y B''.
9. El punto E es el punto de intersección de la recta d y la semirrecta e.
10. Se traza la circunferencia f con centro en E que pasa por B'.
11. El punto A'' es el reflejado de A' en la circunferencia f.
12. El punto A''', reflejado de A'' en la circunferencia c, es el punto buscado.

XIV.- Ángulo: calcula la medida del ángulo que determinan tres puntos del plano hiperbólico.

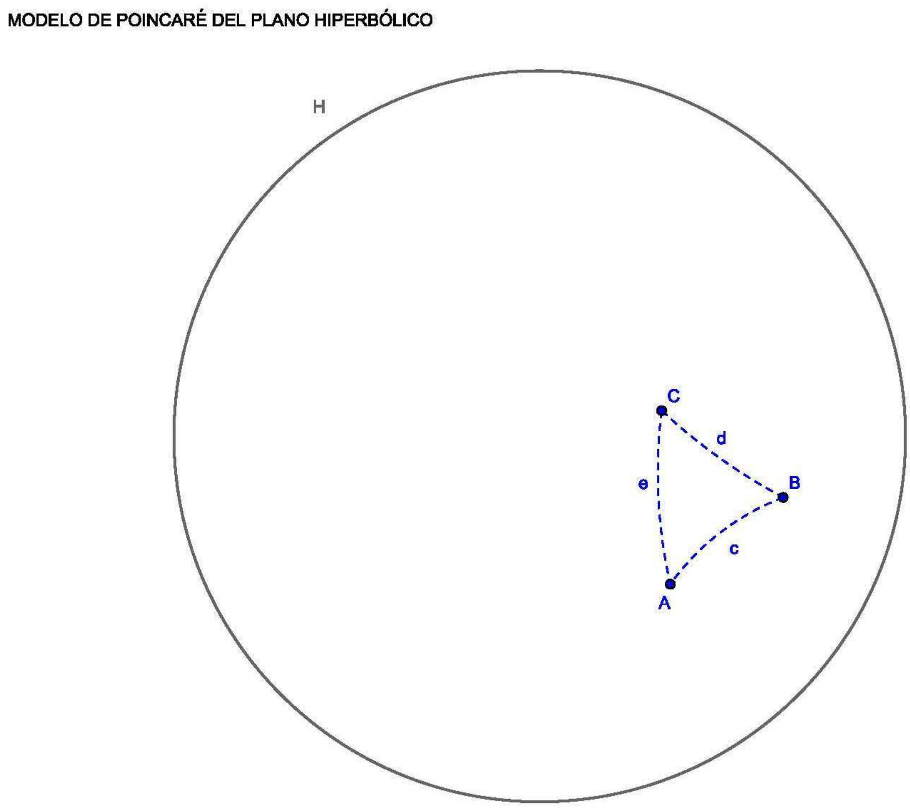
Datos: tres puntos A. B. C (el segundo de ellos será el vértice del ángulo) y la circunferencia H



1. Dados los puntos A, B y C, se construyen las rectas hiperbólicas c=AB y d=BC.
2. Con la herramienta "recta polar o diametral" se trazan las rectas a y b, tangentes en B a c y a d respectivamente.
3. Se hallan A' y C', reflejados de A y C en las rectas a y b respectivamente.
4. Se construyen los puntos D y E, puntos medios de A y A' y de C y C' respectivamente.
5. El ángulo α determinado por los puntos D, B y E es el ángulo buscado.

XV.- **Área de un triángulo**: Calcula el área hiperbólica de un triángulo hiperbólico.

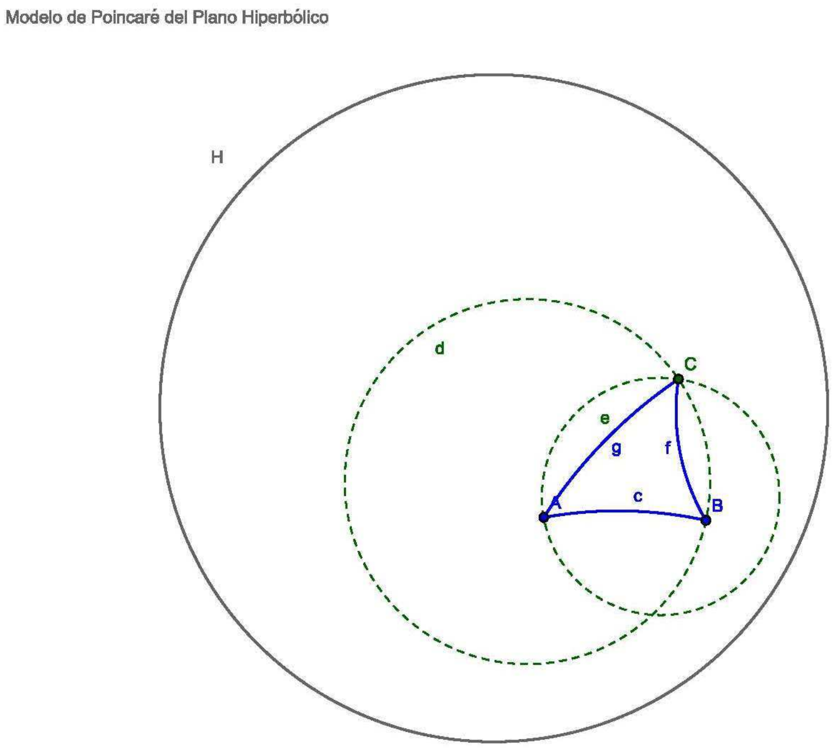
Datos: los tres vértices del triángulo, A, B y C, recorridos en sentido antihorario y la circunferencia H.



1. Dado el triángulo de vértices A, B y C y de lados c=AB, d=BC y e=CA, calculamos α, β y χ, las medidas de los ángulos hiperbólicos determinados por los puntos (B, A y C), (C, B y A) y (A, C y B) respectivamente.
2. El número $n=\pi-(\alpha+\beta+\chi)$ nos da la medida del área buscada.

XVI.- **Triángulo equilátero**: construye un triángulo hiperbólico equilátero, es decir un polígono con tres lados iguales y tres ángulos iguales, a partir de dos de sus vértices.

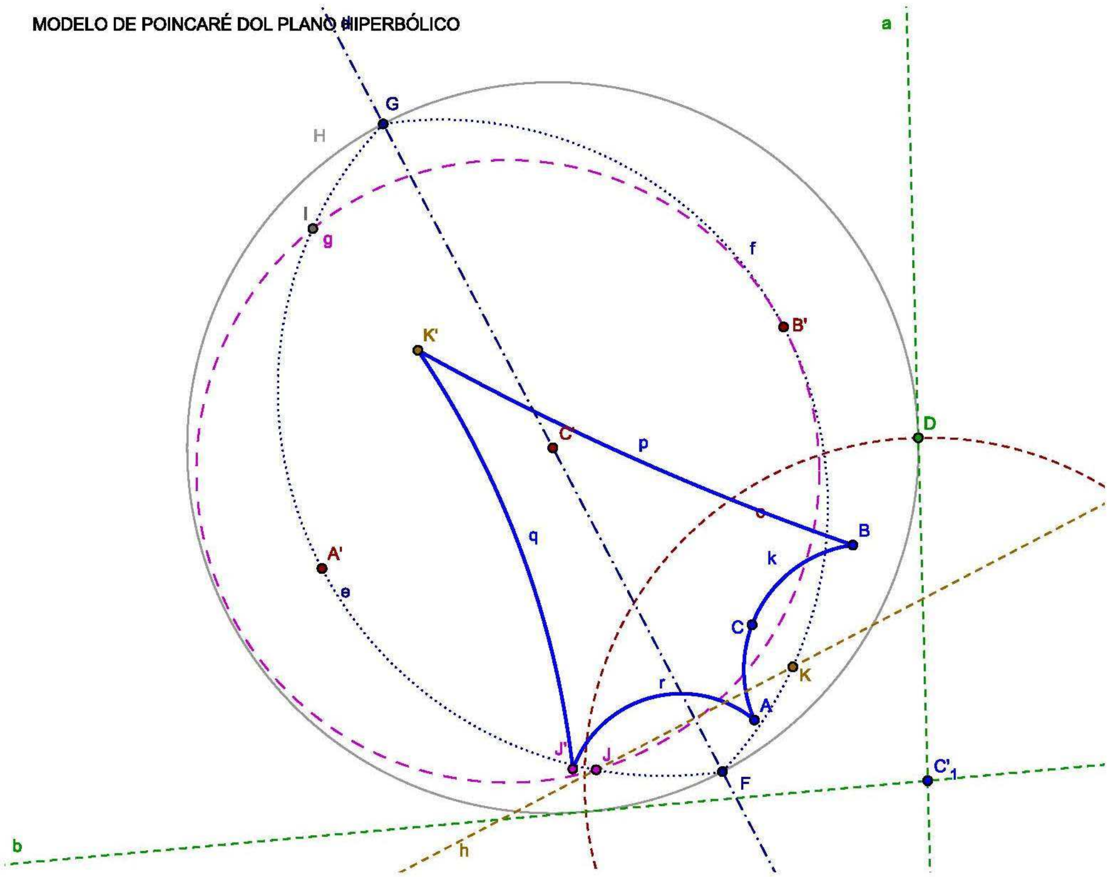
Datos: dos vértices A y B del triángulo y la circunferencia H.



1. Dados los puntos A y B se construyen las circunferencias hiperbólicas d, con centro en A y pasando por B, y e, con centro en B y pasando por A.
2. El punto C es punto de intersección de las circunferencias d y e.
3. Se trazan los segmentos hiperbólicos c=AB, f=BC y g=CA.
4. El triángulo hiperbólico de vértices A, B y C y de lados c=AB, f=BC y g=CA es el triángulo equilátero buscado.

XVII.- **Cuadrado**: construye un polígono de cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales a partir de dos de sus vértices.

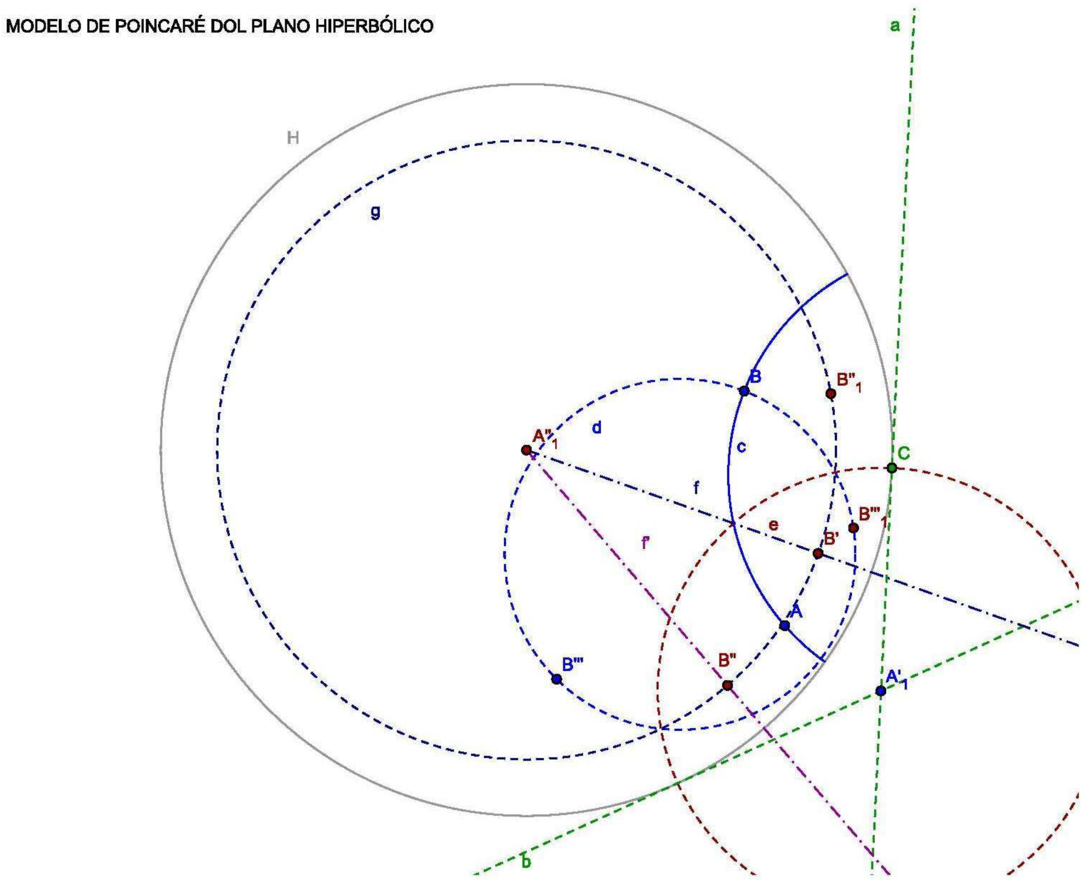
Datos: dos vértices consecutivos A y B del cuadrado hiperbólico y la circunferencia H.



1. Dados los puntos A y B, hallamos el punto C, punto medio hiperbólico entre A y B.
2. Hallamos el punto C'_1, reflejado de C en la circunferencia H.
3. Desde C'_1 trazamos las rectas tangentes a H, a y b.
4. El punto D es el punto de intersección de a con H.
5. Se construye la circunferencia c con centro en C'_1 y que pasa por D.
6. Los puntos A', B' y C' son los reflejados de A, B y C en c.
7. Llamamos d a la mediatriz de los puntos A' Y B'.
8. Los puntos F y G son los puntos de intersección de d y H.
9. Trazamos los arcos e definido por los puntos F, A' y G, y f definido por los puntos F, B' y G.
10. Trazamos la circunferencia hiperbólica g centrada en A' que pasa por B'.
11. Sea J el punto de intersección de las curvas e y g más próximo a F.
12. Sea h la recta perpendicular a d desde J.
13. El punto K es el punto de intersección de h con f.
14. Los puntos J' y K' son los reflejados de J y K en la circunferencia c.
15. Se trazan los segmentos hiperbólicos k=AB, p=BK', q=K'J' y r=J'A.
16. El cuadrilátero hiperbólico de vértices A, B, K' y J' y de lados k=AB, p=BK', q=K'J' y r=J'A es el cuadrado hiperbólico buscado.

XVIII.- **Rotación dados centro y ángulo**: halla la imagen de un punto mediante una rotación hiperbólica de centro y ángulo dados.

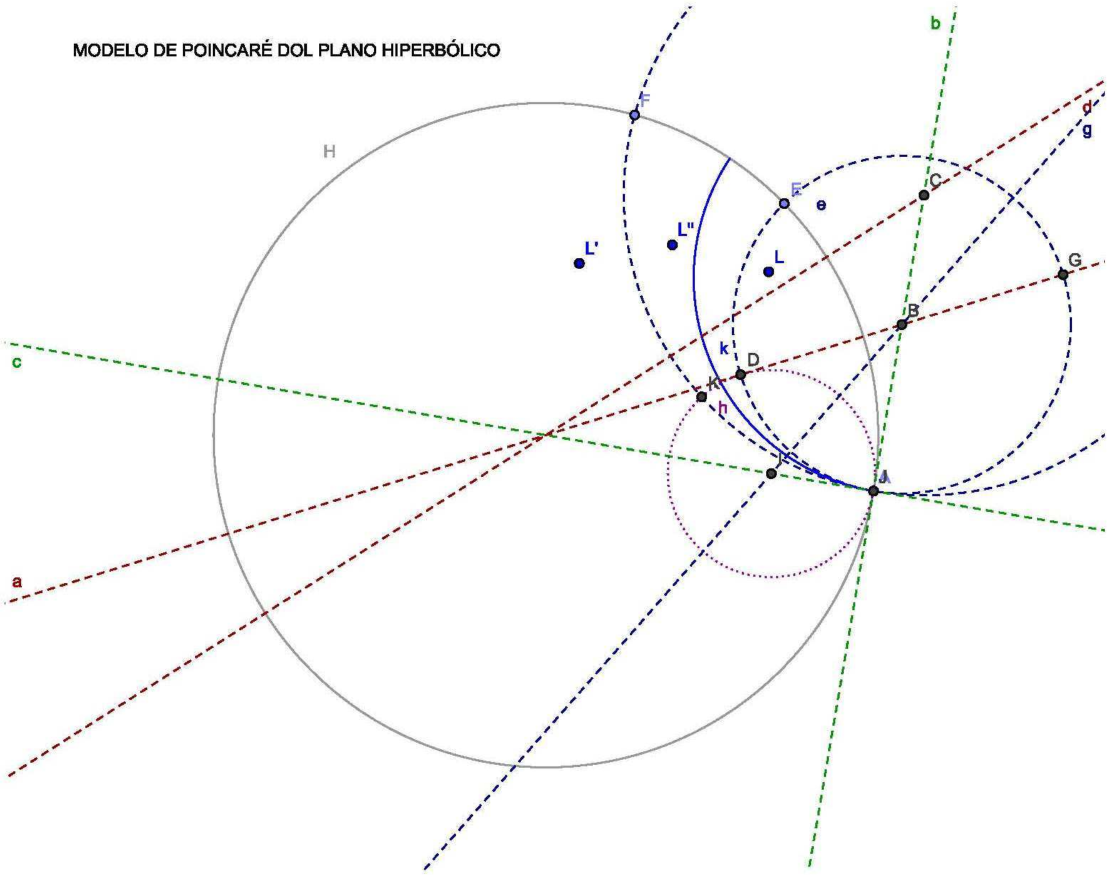
Datos: El centro de rotación A, el punto a rotar B, el ángulo de rotación α y la circunferencia H.



1. Dados los puntos A y B del interior de H, podemos asumir que $A \neq (0,0)$, construimos el punto A'_1 mediante la reflexión en H de A.
2. Desde A'_1 trazamos las rectas tangentes a H, a y b.
3. El punto C es el punto de intersección de a con H.
4. Se construye la circunferencia e con centro en A'_1 y que pasa por C.
5. Los puntos A' y B' son los reflejados de A y B en la circunferencia c.
6. Trazamos la circunferencia hiperbólica d centrada en A que pasa por B.
7. Trazamos la circunferencia g centrada en A' que pasa por B'.
8. Sea B''_1 el punto obtenido al rotar el punto B' un ángulo α en torno al punto A'.
9. Trazamos la semirrecta f con origen en A' que pasa por B'.
10. Llamamos B'' al punto obtenido al reflejar B''_1 en f.
11. El punto B''' obtenido al reflejar el punto B'' en la circunferencia e es el punto buscado.

XIX.- **Rotación límite**: halla la imagen de un punto mediante una rotación límite de la que conocemos su centro y la imagen de un punto impropio dado.

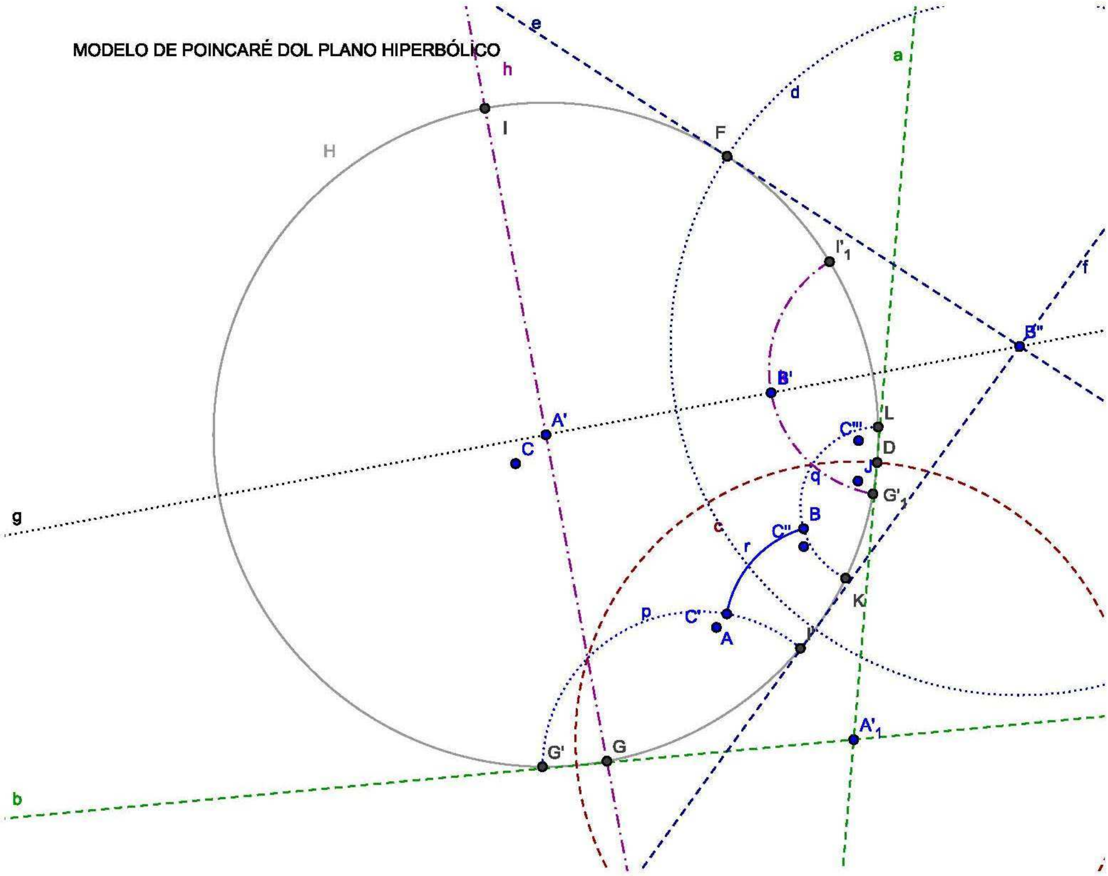
Datos: el centro de rotación A, el punto impropio E y su transformado F, el punto a rotar L y la circunferencia H.



1. Mediante la herramienta “recta polar o diametral”, trazamos la recta b, tangente a H en A.
2. Llamamos c a la recta que pasa por A y por el origen de coordenadas.
3. Las rectas a y d son las mediatrices entre los puntos A y E y entre los puntos A y F respectivamente.
4. Sean B y C los puntos de intersección de las rectas a y d con la recta b respectivamente.
5. Trazamos las circunferencias e, con centro en B pasando por A y f, con centro en C pasando por A.
6. Sea D el punto de intersección de a con e que queda en el interior de la circunferencia H.
7. Trazamos la recta g, mediatriz entre los puntos A y D.
8. El punto J es el punto de intersección de g con c.
9. Trazamos la circunferencia h, horociclo con centro en J y pasando por A.
10. Llamamos K al puto de intersección de h con f distinto de A.
11. Lamamos k a la mediatriz hiperbólica entre los puntos D y K.
12. Sea L’ el reflejado del punto L en k.
13. El punto L’’, reflejado de L’ en f es el punto buscado.

XX.- **Traslación**: halla la imagen de un punto mediante la traslación hiperbólica definida por un vector hiperbólico del que conocemos su origen y su extremo.

Datos: los puntos A y B, origen y extremo del vector de traslación, el punto a trasladar C y la circunferencia H.



1. Dados los puntos A, B y C del interior de H, podemos asumir que A≠(0,0), construimos el punto A'_1 mediante la reflexión en H de A.
2. Desde A'_1 trazamos las rectas tangentes a H, a y b.
3. El punto D es el punto de intersección de a con H.
4. Se construye la circunferencia c con centro en A'_1 y que pasa por D.
5. Los puntos A', B' y C' son los reflejados de A y B en la circunferencia c.
6. Construimos el punto B'', reflejado de B' en H.
7. Desde B'' trazamos las rectas tangentes a H, e y f.
8. El punto F es el punto de intersección de e con H.
9. Trazamos la circunferencia d con centro en B'' que pasa por F.
10. Sea C'' el reflejado de C' en d.
11. Sea g la recta que pasa por A' y B'.
12. Sea h la perpendicular a g por A'.
13. Sean I h G los puntos de intersección de h con H.
14. Sean I'_1 y G'_1 los puntos reflejados de I y G en d.
15. Sea i el arco definido por los puntos I'_1, B' y G'_1.
16. Sea C''' el reflejado de C'' en i.
17. El punto J, reflejado de C''' en c, es el punto buscado.

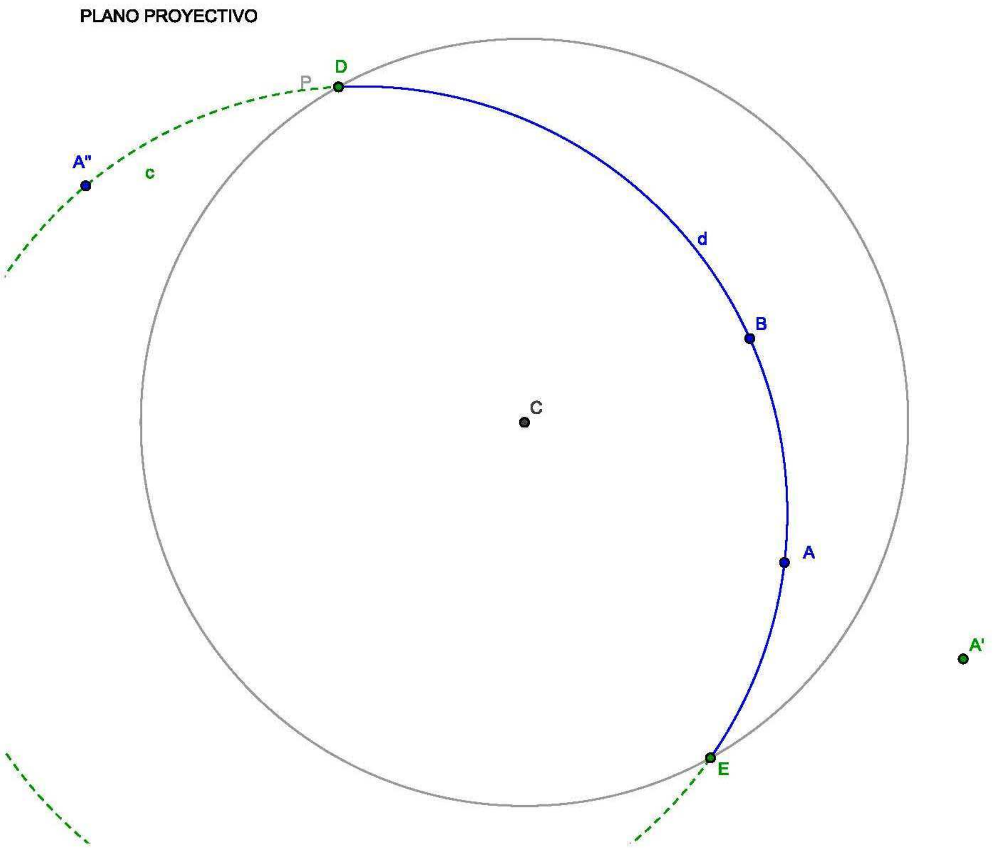
Parte tercera

Elaboración de herramientas proyectivas

<u>Elaboración de herramientas proyectivas</u>

Veremos a continuación el proceso de elaboración de cada una de las herramientas del Modelo del disco del Plano Proyectivo P en el orden en el que aparecen al desplegar el paquete de herramientas, que coincide con el orden de construcción de las mismas.

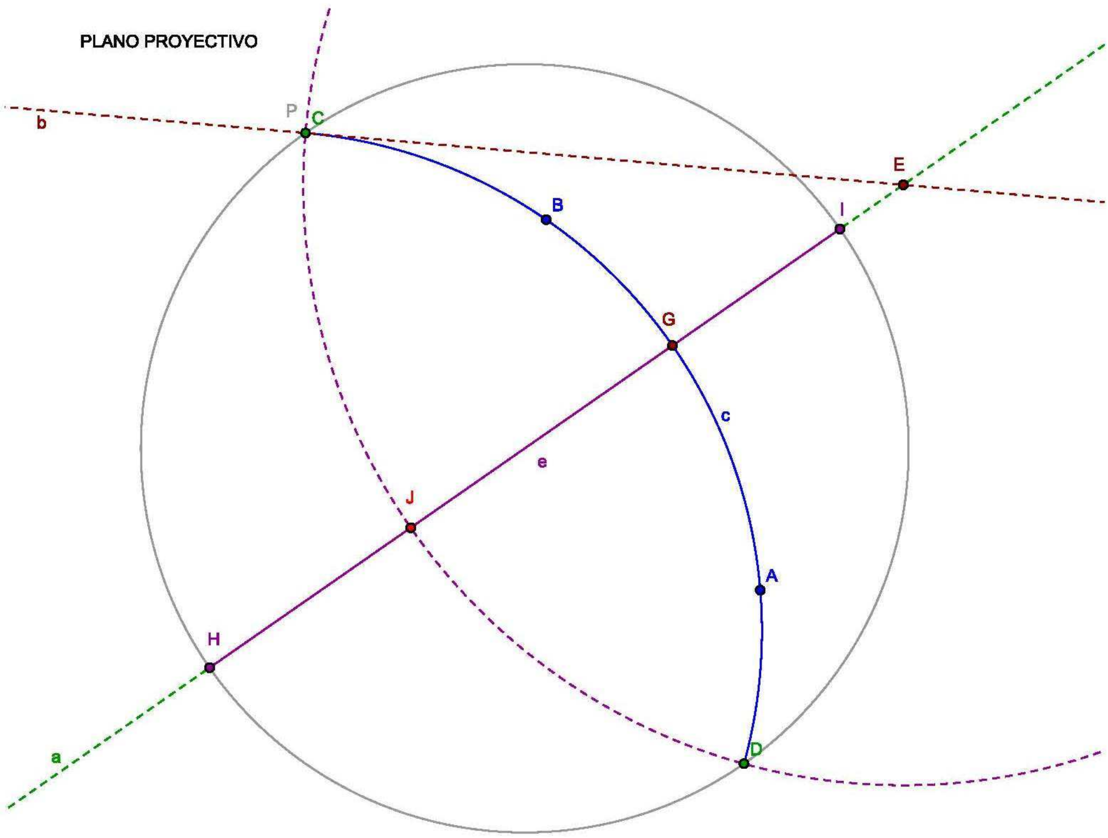
I.- **Recta**: recta proyectiva que pasa por dos puntos dados.
Datos: los puntos A y B y la circunferencia P.



10. Dados los puntos A y B del interior de P, podemos asumir que A≠(0,0), construimos el punto A' mediante la reflexión en P de A.
11. Con ayuda de la herramienta "punto medio o centro" determinamos el punto C, centro de la circunferencia P.
12. El punto A'' es el punto reflejado de A' en el punto C.
13. Se construye la circunferencia d que pasa por A, B y A''.
14. Los puntos D y E son los puntos de intersección de d y P.
15. Finalmente, el arco d que pasa por los puntos D, B y E, admitiendo intersecciones en prolongaciones, es la recta proyectiva buscada.

II.- **Polo de una recta**: punto en el que convergen todas las perpendiculares a la recta dada.

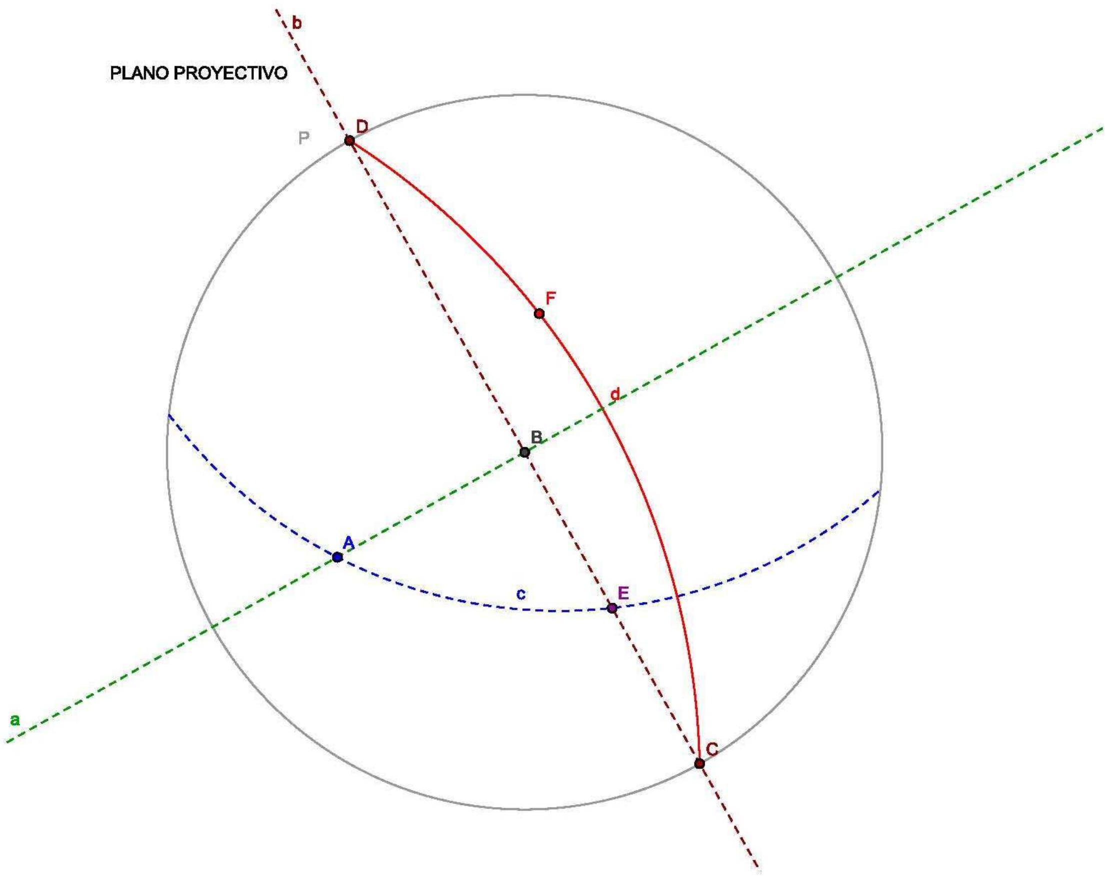
Datos: dos puntos A y B de la recta c y la circunferencia P.



10. Dados los puntos A y B del interior de P (podemos asumir que A≠(0,0)), construimos la recta proyectiva c y los puntos C y D de intersección de c con P.
11. Trazamos la recta a, mediatriz de C y D.
12. Trazamos la recta b, polar de C con respecto a c.
13. Llamamos E al punto de intersección de a y b.
14. Trazamos la circunferencia d con centro en E que pasa por C.
15. Determinamos los puntos H e I de intersección de a con P'.
16. Trazamos el segmento e con extremos en H e I, admitiendo intersección en prolongaciones.
17. El punto J, punto de intersección de d con e es el polo de la recta proyectiva c.

III.- **Polar de un punto distinto del centro**: traza la recta proyectiva cuyo polo es el punto dado.

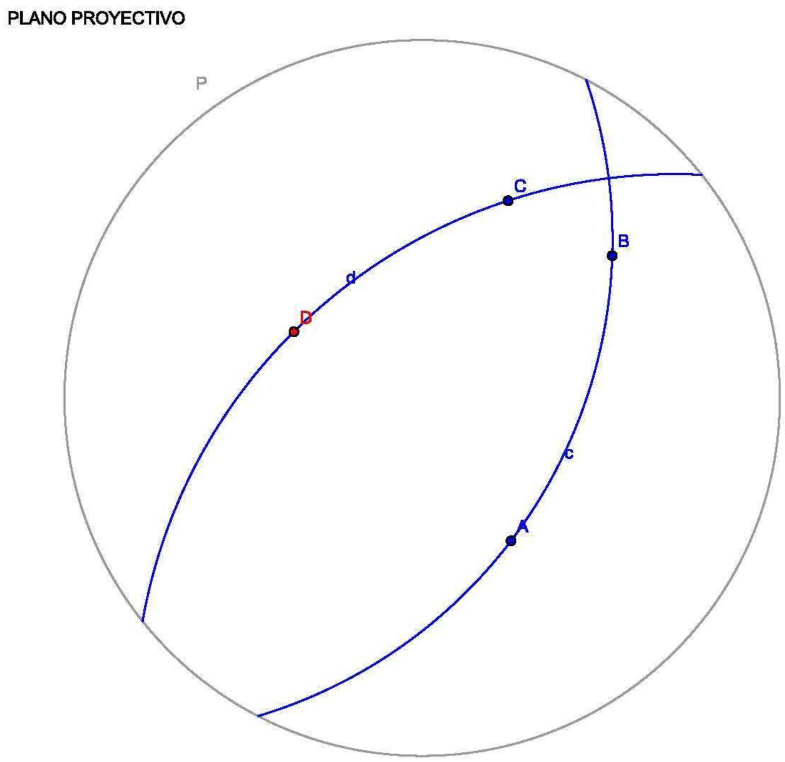
Datos: el punto A y la circunferencia P.



13. Dado el punto A≠(0,0), construimos la recta a que pasa por A y por el centro B=(0,0).
14. Trazamos la recta b, perpendicular a a por B.
15. Llamamos C y D a los puntos de intersección de b con P.
16. Llamamos E al punto medio entre B y C.
17. Trazamos la recta proyectiva c que pasa por A y E.
18. Determinamos el punto F, polo de la recta proyectiva c.
19. La recta proyectiva d que pasa por C y por F es la polar buscada.

IV.- **Recta perpendicular**: traza la recta proyectiva perpendicular a una recta proyectiva dada desde un punto exterior a la misma.

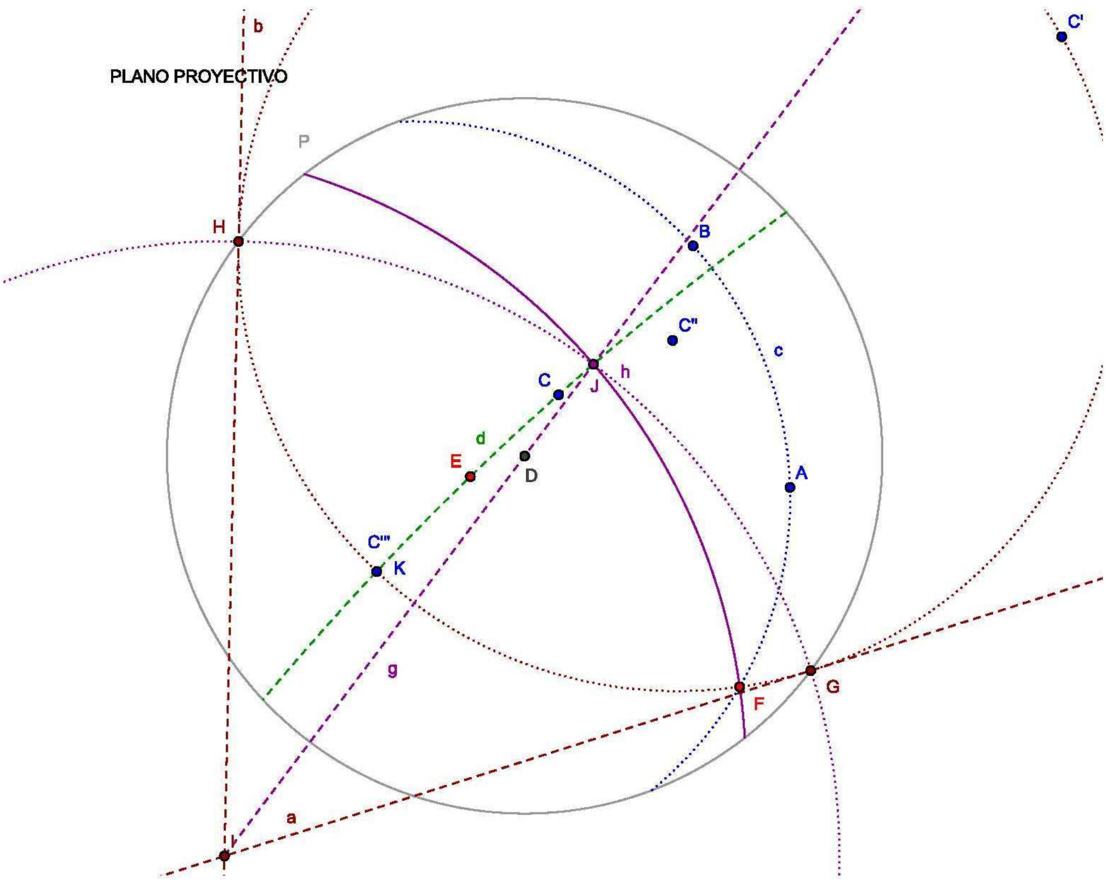
Datos: dos puntos A y B de la recta c, un punto C exterior a la misma y la circunferencia P.



3. Se construye el punto D, polo de la recta proyectiva c=AB.
4. La recta proyectiva d que pasa por C y D es la perpendicular buscada.

V.- **Reflexión en una recta**: halla el reflejado de un punto dado en una recta proyectiva.

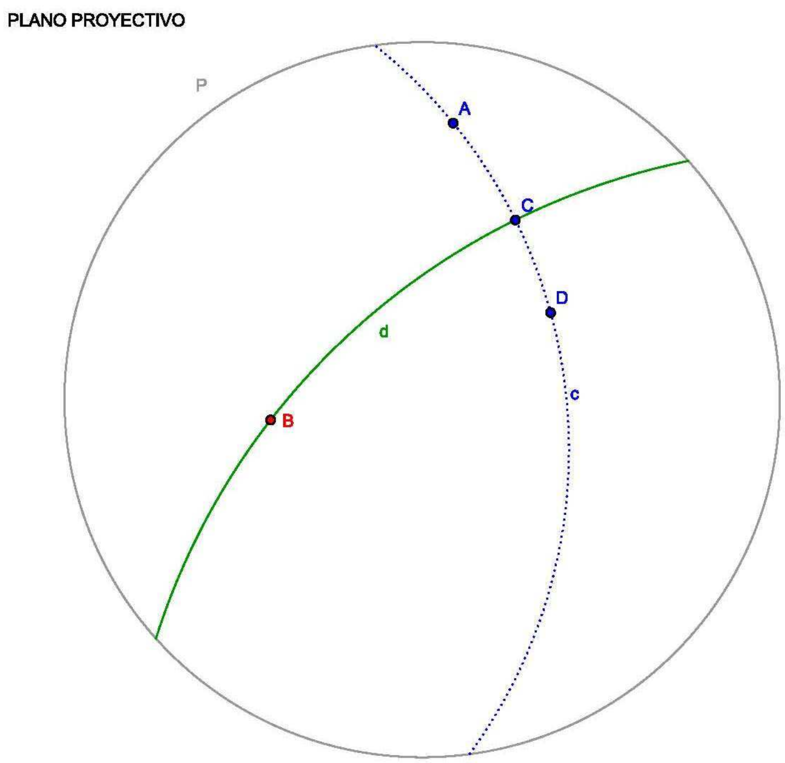
Datos: dos puntos A y B de la recta c, un punto C fuera de c y la circunferencia P.



3. Hallamos C’, reflejado de C en c.
4. Llamamos D=(0,0) al centro de P.
5. Determinamos el punto E, polo de la recta proyectiva c.
6. Trazamos la recta proyectiva d que pasa por C y por E.
7. Determinamos el punto F, polo de la recta proyectiva d.
8. Llamamos C’’ al punto reflejado de C’ en P.
9. Llamamos C’’’ al reflejado de C’’ en el centro D=(0,0).
10. Trazamos la circunferencia e que pasa por los puntos C’, C’’’ y F.
11. Llamamos G y H a los puntos de intersección de e con P.
12. Trazamos las rectas a y b, tangentes a e en G y H respectivamente.
13. Llamamos I al punto de intersección de a y b.
14. Trazamos la circunferencia f con centro en I y que pasa por G.
15. Trazamos la semirrecta g, con origen en I y que pasa por D=(00).
16. Llamamos J al punto de intersección de f con g.
17. Trazamos la recta proyectiva h que pasa por los puntos F y J.
18. El punto K, polo de h,es el punto buscado.

VI- **Reflexión en un punto**: halla el reflejado de un punto dado en otro punto dado, esto es, el punto de la recta proyectiva determinado por ambos que equidista con el dado del centro.

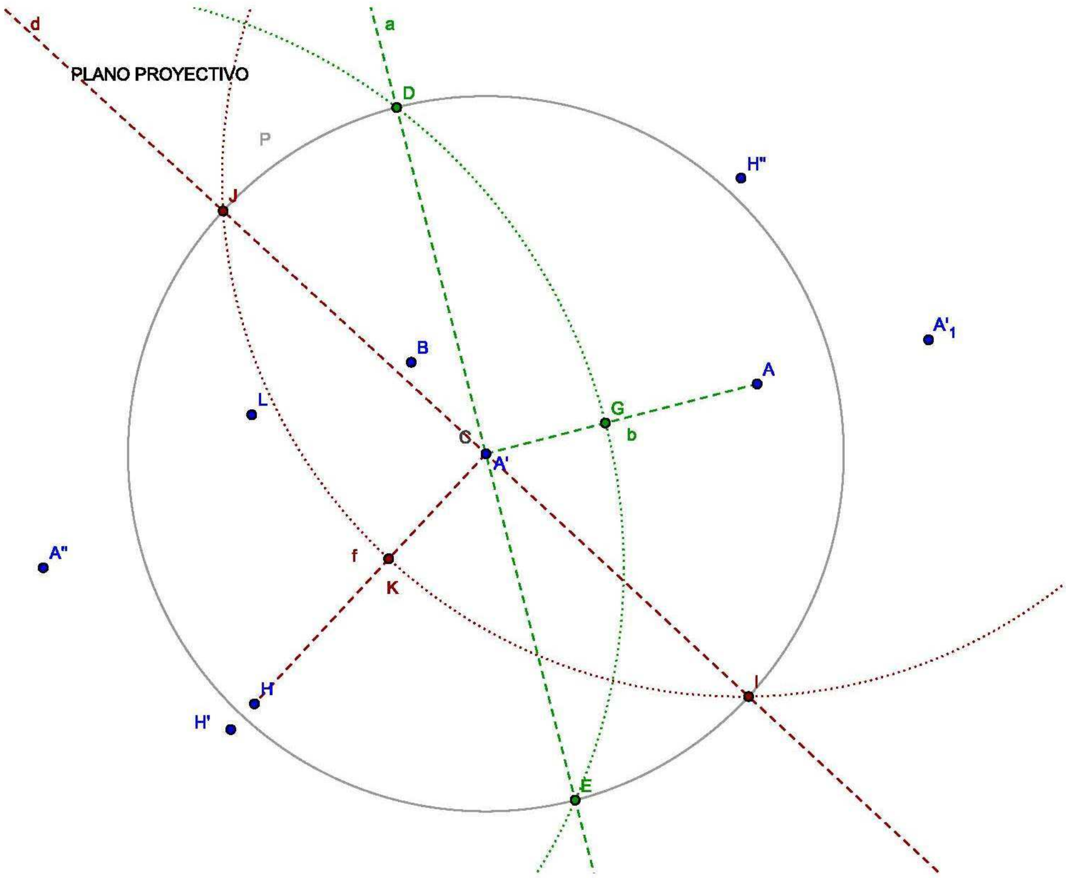
Datos: el centro C, un punto A y la circunferencia P.



1. Trazamos la recta proyectiva c que pasa por A y C.
2. Llamamos B al polo de c.
3. Trazamos la recta proyectiva d que pasa por C y por B.
4. El punto D, reflejado de A en la recta proyectiva d es el punto buscado.

VI.- **Punto medio**: determina el punto medio entre dos puntos dados.

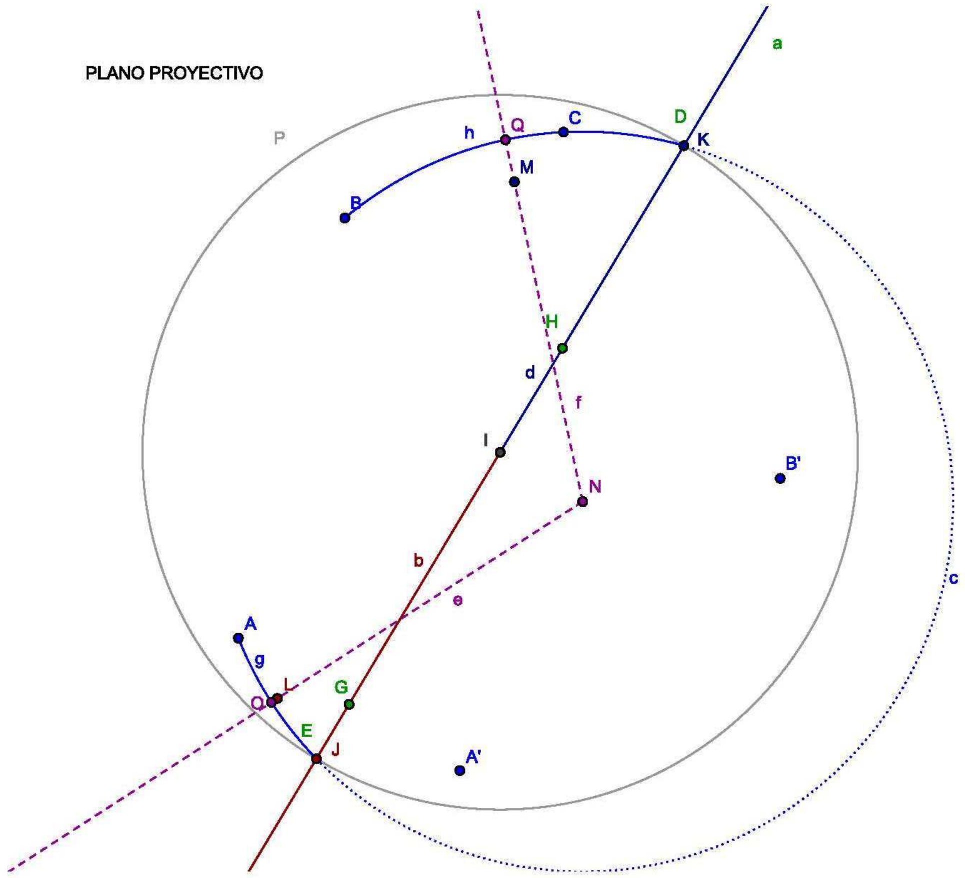
Datos: dos puntos A y B, y la circunferencia P.



1. Dados los puntos A y B del interior de P, A≠(0,0), construimos el punto A'_1 mediante la reflexión en P de A.
2. Determinamos A'', reflejado de A'_1 en el centro C=(0,0).
3. Trazamos la mediatriz a entre los puntos A'_1 y A''.
4. Los puntos D y E son los puntos de intersección de a con P.
5. Trazamos la circunferencia c, con centro en A'' y que pasa por D.
6. Llamamos A' al reflejado de A en c.
7. Trazamos el segmento b que une A y A'.
8. Llamamos G al punto de intersección de b con c.
9. Sea H el reflejado de B en la recta proyectiva determinada por D y G.
10. Construimos el punto H' mediante la reflexión en P de H.
11. Determinamos H'', reflejado de H' en el centro C=(0,0).
12. Trazamos la mediatriz d entre los puntos H' y H''.
13. Los puntos I y J son los puntos de intersección de d con P.
14. Trazamos la circunferencia e, con centro en H'' y que pasa por I.
15. Trazamos el segmento f que une H con C=(,0).
16. Llamamos K al punto de intersección de e con f.
17. El punto L, reflejado de K en la recta proyectiva determinada por los puntos D y G, es el punto buscado.

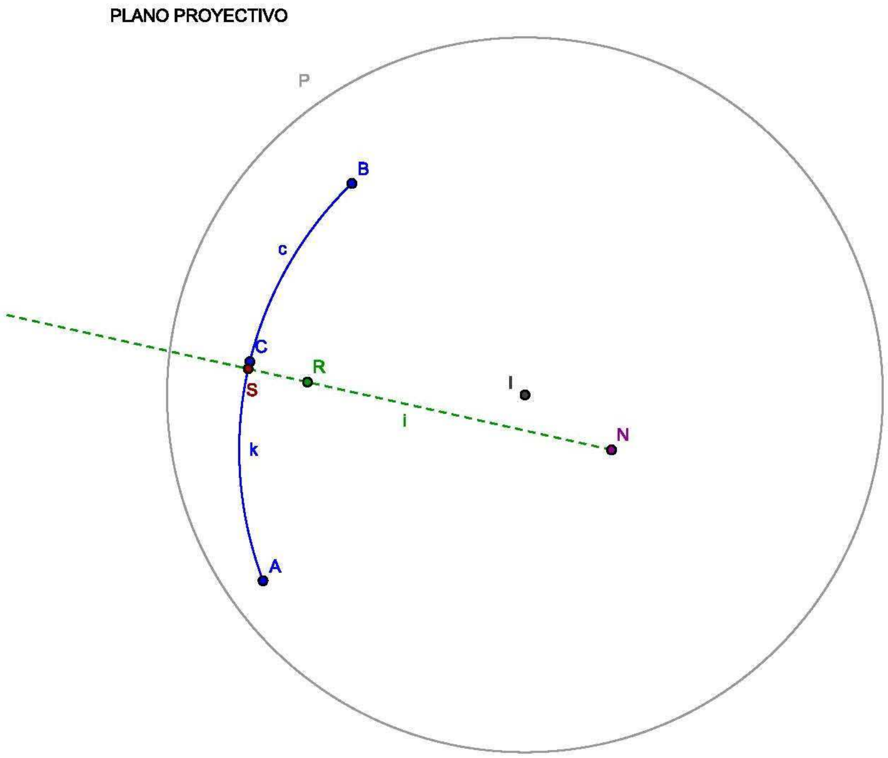
VIII- **Segmento**: traza el segmento proyectivo de mínima longitud entre dos puntos dados..

Datos: dos puntos A y B y la circunferencia P.



9. El punto C es el punto medio proyectivo entre los puntos A y B.
10. Trazamos el arco c que pasa por los puntos A, C y B.
11. Si fuera necesario desplazamos uno de los puntos A o B para conseguir que el arco c se salga de P.
12. Los puntos E y F son los puntos de intersección de c con P.
13. Trazamos la recta a por los puntos E y F.
14. Sean A' y B' respectivamente los reflejados de A y B en a.
15. Sean G el punto medio entre A y A' y H el punto medio entre B y B'.
16. Sean b y d las semirrectas con origen en Z=(0,0) que pasan por G y H respectivamente.
17. Sean I y J los puntos de intersección de P con b y d respectivamente.
18. Sean K y L los puntos medios entre A e I y entre B y J respectivamente.
19. Llamamos M al centro del arco c.
20. Trazamos las semirrectas e y f con origen en M y que pasan por los puntos K y L respectivamente.
21. Sean N y O los puntos de intersección de c con e y f respectivamente.

22. Sean g y h los arcos determinados por los puntos A, N y I, y B, O y J respectivamente.
23. Desplazamos A o B de manera que el arco c quede dentro de P.

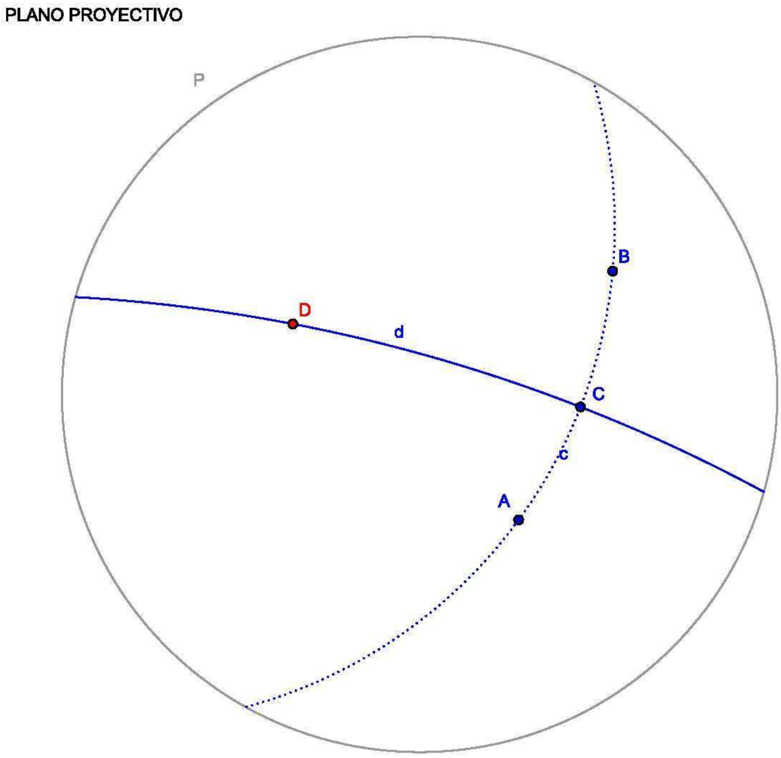


24. Llamamos R al punto medio entre A y B.
25. Trazamos la semirrecta i con origen en M y que pasa por R.
26. Sea S el punto de intersección de i con c.
27. Sea k el arco de circunferencia determinado por los puntos A, S y B.
28. Los arcos k ó la unión de g y h nos dan el segmento buscado.

Observación: en la construcción de esta herramienta nos encontramos por primera vez de manera insoslayable con la dificultad derivada del hecho de ser el modelo del plano proyectivo la proyección de un espacio cociente. Dependiendo de la posición relativa de los puntos A y B dentro del disco unidad, el segmento que determinan puede tener una o dos componentes conexas dentro del modelo del disco. Así, para que la herramienta sea dinámica es preciso determinar de manera excluyente ambas posibilidades. Oor esa razón al aplicar esta herramienta aparecerá en la lista de objetos dependientes algún objeto indefinido.

IX **Mediatriz**: recta proyectiva perpendicular al segmento hiperbólico definido por dos puntos dados en su punto medio.

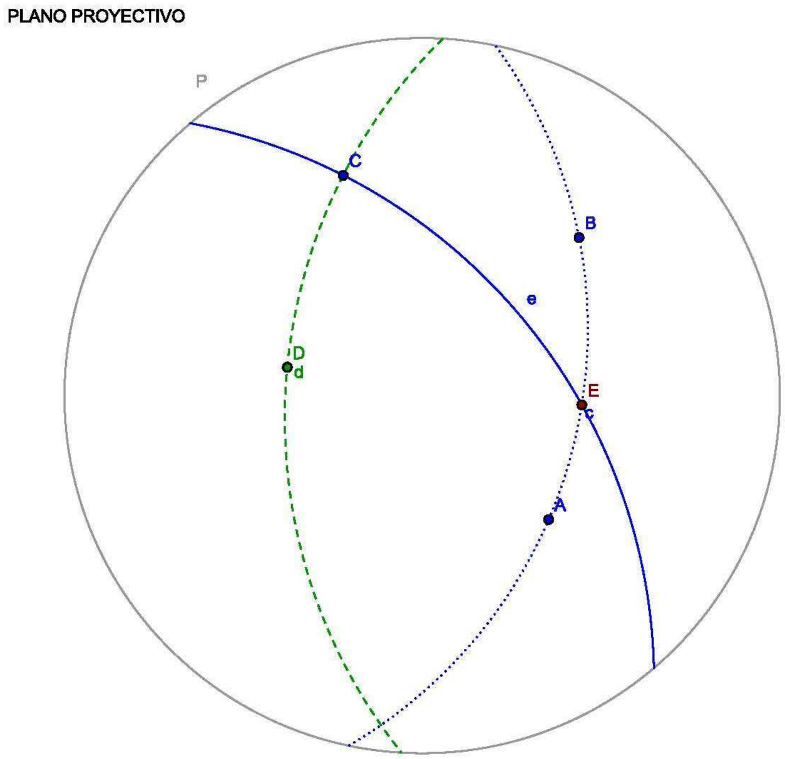
Datos: los puntos A y B y la circunferencia P.



11. Dados los puntos A y B determinamos C, el punto medio entre A y B.
12. Trazamos la recta c que pasa por los puntos A y B.
13. Determinamos el punto D, polo de la recta proyectiva c.
14. La recta proyectiva d que pasa por los puntos C y D es la mediatriz buscada.

X.- **Recta de mínima distancia**: Dados una recta y un punto exterior a la misma traza la recta que, pasando por dicho punto, minimiza la distancia a la recta dada.

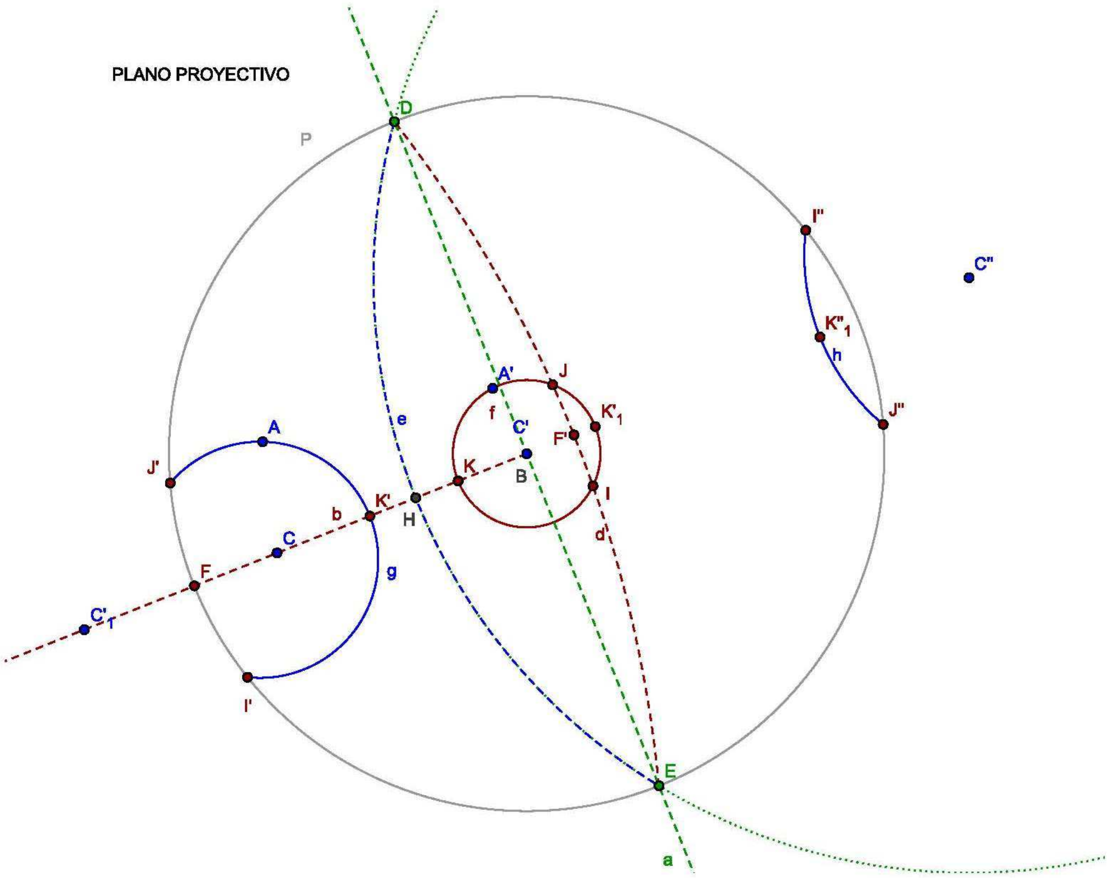
Datos: dos puntos A y B de la recta proyectita c, un punto exterior C y la circunferencia P.



10. Determinamos el punto D, polo de la recta proyectiva c.
11. Trazamos la recta proyectiva d que pasa por los puntos C y D.
12. Determinamos el punto E, polo de la recta proyectiva d.
13. La recta proyectiva e que pasa por C y E es la recta buscada.

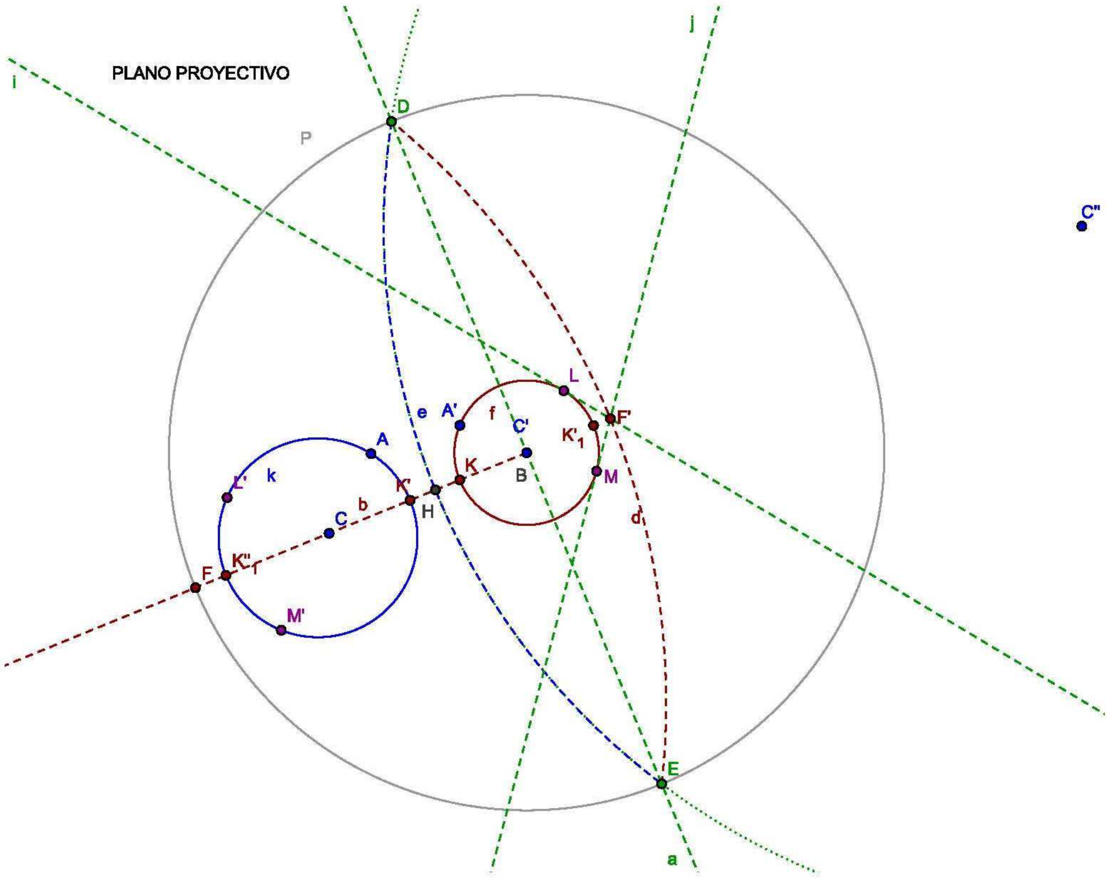
XI.- **Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos:** lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia proyectiva que un punto dado de otro punto dado llamado centro.

Datos: el centro de la circunferencia C, un punto A y la circunferencia P.



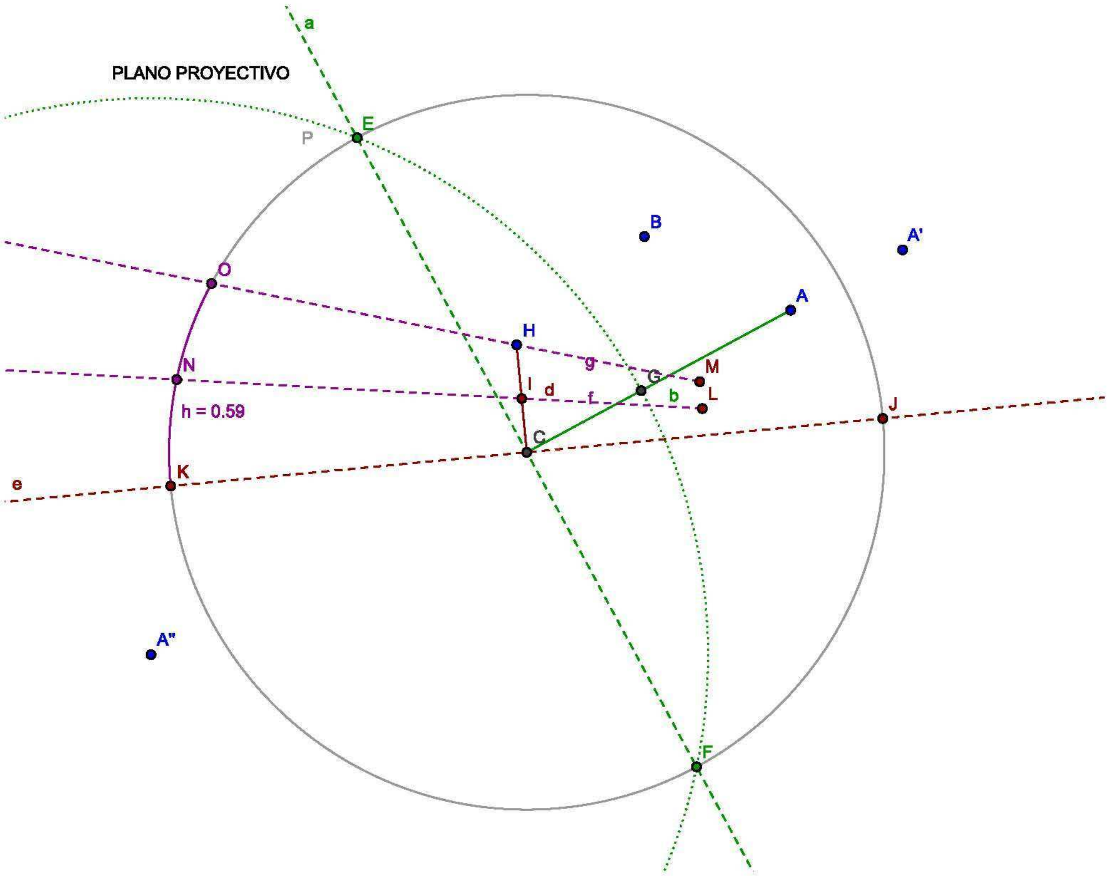
12. Dados los puntos A y C del interior de P, podemos asumir que C≠(0,0), construimos el punto C'_1 mediante la reflexión en P de C.
13. El punto C'' es el reflejado de C'_1 en el centro B=(0,0).
14. Trazamos la recta a, mediatriz entre los puntos C'_1 y C''.
15. Los puntos D y E son los puntos de intersección de a con P.
16. Trazamos la circunferencia c, con centro en C'' y que pasa por D.
17. Trazamos la semirrecta b con origen en B=(0,0) y que pasa por C.
18. Llamamos F al punto de intersección de b con P.
19. Llamamos C' y F' a los puntos reflejados de C y F respectivamente, en la circunferencia c.
20. Llamamos H al punto de intersección de b con c.
21. Trazamos la recta proyectiva d que pasa por D y por F'.
22. Trazamos la recta proyectiva e por los puntos D y H.
23. El punto A' es el reflejado de A en la recta proyectiva e.
24. Trazamos la circunferencia f, con centro en C' y que pasa por A'.

25. Si fuera preciso desplazamos uno de los puntos A o C para conseguir que la recta proyectiva d y la circunferencia f tengan dos puntos de intersección. Llamamos I y J a dichos puntos.
26. Llamamos I' y J' a los reflejados de I y de J respectivamente en c.
27. Llamamos I'' y J'' a los reflejados de I' y de J' respectivamente en B.
28. Llamamos K al punto de intersección de b con f.
29. Llamamos K'_1 al reflejado del punto K en B.
30. Llamamos K' al reflejado del punto K en c.
31. Llamamos K''_1 al reflejado del punto K'_1 en la recta proyectiva e.
32. Trazamos los arcos de circunferencia g por I', K' y J', y h por I'', K''_1 y J''.
33. Desplazamos ahora A o C para conseguir que la recta proyectiva d y la circunferencia f tengan intersección vacía.



34. Trazamos las rectas i y j, tangentes a la circunferencia f desde F'.
35. Sean L y M los puntos de intersección de i y j respectivamente con f.
36. Sean L' y M' los puntos reflejados de L y M respectivamente en c.
37. Trazamos la circunferencia k que pasa por los puntos K', L' y M'.
38. La circunferencia k o la unión de los arcos g y h constituyen la circunferencia proyectiva buscada.

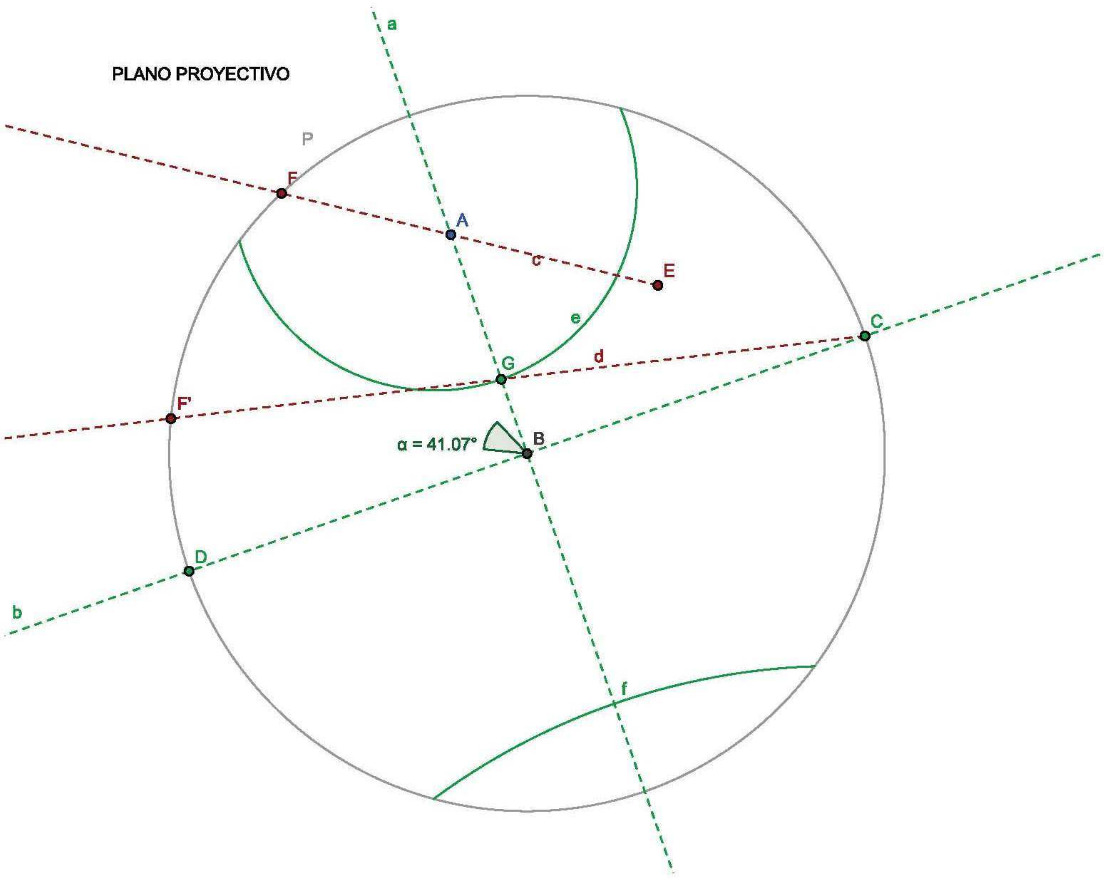
XII.- **Distancia**: calcula la distancia proyectiva entre dos puntos.
Datos: dos puntos A y B y la circunferencia P.



1. Dados los puntos A y B hallamos el punto A’, reflejado de A en P.
2. El punto A’’ es el reflejado de A’ respecto de C.=(0,0).
3. Trazamos la mediatriz a entre A’ y A’’.
4. Llamamos E y F a los puntos de intersección de a con P.
5. Trazamos la circunferencia c con centro en A’’ y que pasa por E.
6. Trazamos el segmento b que une C con A.
7. Llamamos G al punto de intersección de b con c.
8. Determinamos el punto H, reflejado de B respecto de la recta proyectiva determinada por E y G.
9. Trazamos el segmento d que une C con H.
10. Llamamos I al punto medio de d.
11. Trazamos la recta e, perpendicular a d por C.
12. Llamamos J y K a los puntos de intersección de e con P.
13. L y M son los puntos medios entre J e I y entre J y H respectivamente.
14. Trazamos las semirrecta f, con origen en L y que pasa por I, y g, con origen en M y que pasa por H.
15. Sean N y O los puntos de intersección de P con f y g respectivamente.
16. Trazamos el arco h determinado por los puntos K, N y O.
17. El valor **n=distancia[h]** nos da el valor de la distancia proyectiva entre los puntos A y B.

XIII.- **Circunferencia dados su centro y radio**: traza el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de uno dado una distancia dada.

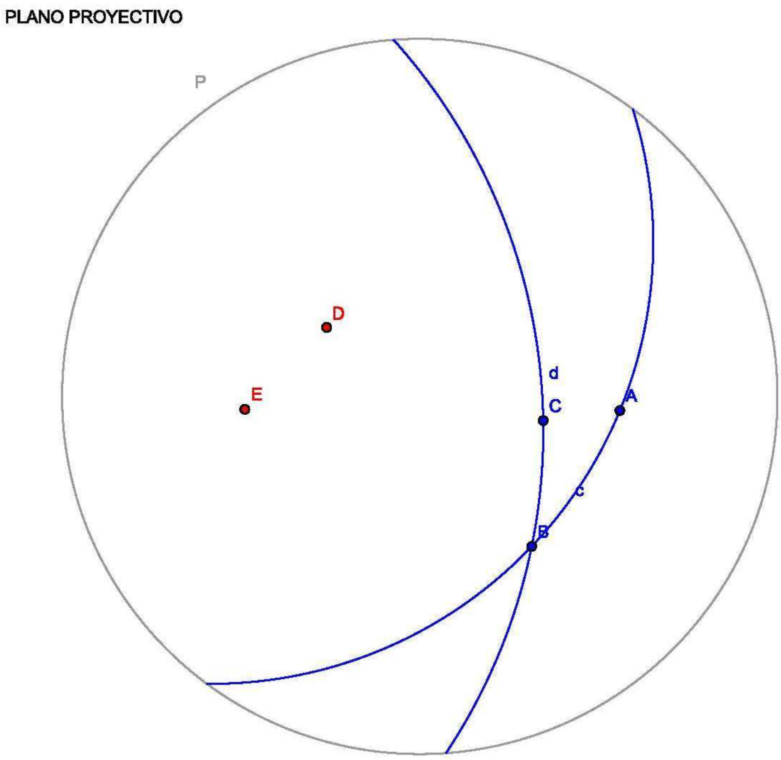
Datos: el centro A, el radio **n** y la circunferencia P.



1. Dado el punto A≠(0,0), trazamos la recta a que pasa por el centro B=(0,0) y por A.
2. Trazamos la recta b, perpendicular a a por B.
3. Llamamos C y D a los puntos de intersección de b con P.
4. Llamamos E al punto medio entre A y C.
5. Trazamos la semirrecta c con origen en E y que pasa por A.
6. Llamamos F al punto de intersección de c con P.
7. Llamamos **p**= **n** - π floor(2 **n** / π) / 2
8. Desde F y con centro en B trazamos el ángulo de amplitud **p** y obtenemos el punto extremo F'.
9. Trazamos la semirrecta d con origen en C y que pasa por F'.
10. Llamamos G al punto de intersección de a con d.
11. La circunferencia proyectiva de centro A y que pasa por G, dada por los arcos e y f o por la circunferencia g, es la circunferencia proyectiva buscada

XIV.- **Ángulo**: calcula la medida del ángulo que determinan tres puntos del plano proyectivo.

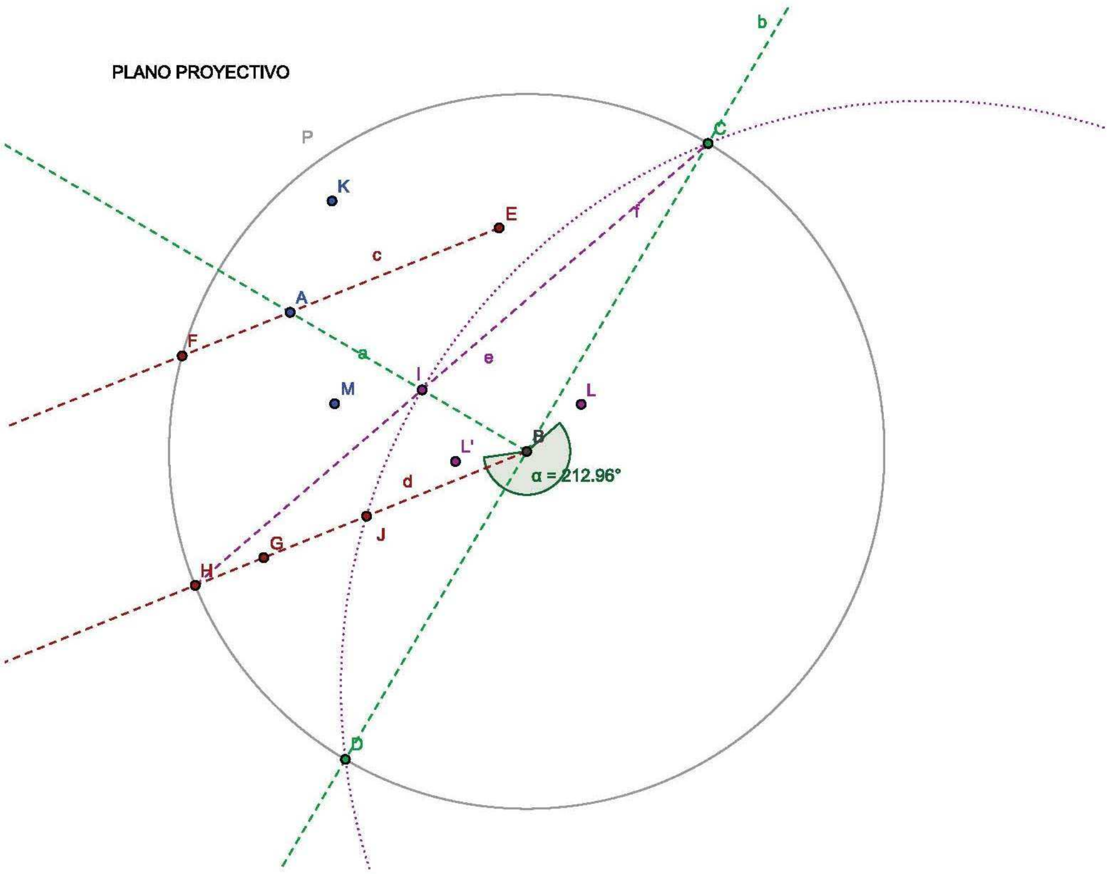
Datos: tres puntos A. B. C (el segundo de ellos será el vértice del ángulo) y la circunferencia P.



1. Dados A, B y C, trazamos las rectas proyectivas c, por A y B, y d, por B y C.
2. Llamamos D y E a los polos de c y d respectivamente.
3. La distancia proyectiva **a** entre los puntos D y E coincide con la medida en radianes del ángulo que forman las rectas c y d.

XV.- **Rotación proyectiva**: halla la imagen de un punto mediante una rotación proyectiva de centro y ángulo dados.

Datos: El centro de rotación A, el punto a rotar K, el ángulo de rotación α y la circunferencia P.



1. Dado el punto A≠(0,0), trazamos la semirrecta a con origen en el centro B=(0,0) y que pasa por A.
2. Trazamos la recta b, perpendicular a a por B.
3. Llamamos C y D a los puntos de intersección de b con P.
4. Llamamos E al punto medio entre A y C.
5. Trazamos la semirrecta c con origen en E y que pasa por A.
6. Llamamos F al punto de intersección de c con P.
7. Llamamos G al punto medio entre F y D.
8. Trazamos la semirrecta d con origen en B=(0,0) y que pasa por G.
9. Llamamos H al punto de intersección de d con P.
10. Trazamos el segmento e con extremos C y H.
11. Llamamos I al punto de intersección de a con e.
12. Trazamos la circunferencia f que pasa por los puntos C, D e I.
13. Llamamos J al punto de intersección de d con f.
14. Llamamos L al reflejado proyectivo de K en la recta proyectiva que pasa por I y J.
15. Sea L' el punto obtenido al rotar L un ángulo -α en torno a B=(0,0).
16. El punto M reflejado proyectivo de L' en la recta proyectiva que pasa por I y J es el punto buscado.

Bibliografía

1. Brannan, David A., Esplen, Matthew F. y Gray, Jeremy J., (1999), "*Geometry*", Cambridge University Press
2. Euclides,(300 aC), "*Elementos*", http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm
3. Kádomtsev, S.B., (2011), "*Geometría de Lobachevski y física*", ¡Ciencia a todos!, URSS, Mosú
4. Montesdeoca, Ángel, (2011), "*Apuntes de Geometría Proyectiva Cónicas y Cuádricas*", Universidad de La Laguna http://webpages.ull.es/users/amontes/apuntes/gdhmono.pdf
5. Pérez Padierna, David y Santín Ortega, Aarón, (2009), "*Geometrías no Euclídeas*", Universidad de León, http://es.scribd.com/tengutengu/d/11504853-Geometrias-No-Euclideas
6. Petit, Jean-Pierre, (1980), "*Le Géométricon (Les Aventures d'Anselme Lanturlu)*"**,** Belin
7. Yonte Sanchidrián, Teresa, (2008), "*Fundamentos geométricos de la óptica de multicapas*", Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Departamento de Óptica,